

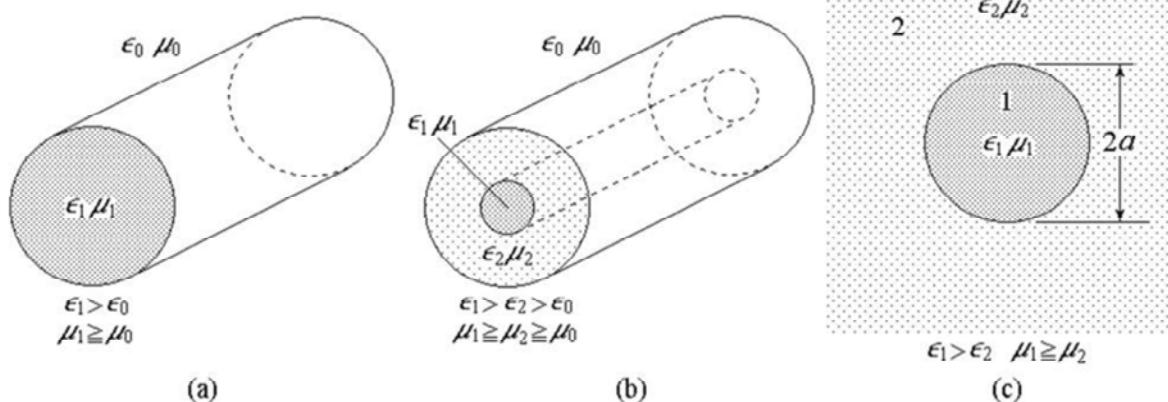
FIBRE OPTICE

Capitolul 1

PROBLEMATICA ABORDATA

- Descrierea propagarii undelor luminoase folosind ecuațiile lui Maxwell
- Dispersia în fibra optică
- Limitarea vitezei de transmisie datorită dispersiei
- Pierderile în FO
- Efecte neliniare în fibra optică

Ghid cilindric dielectric si fibra optica

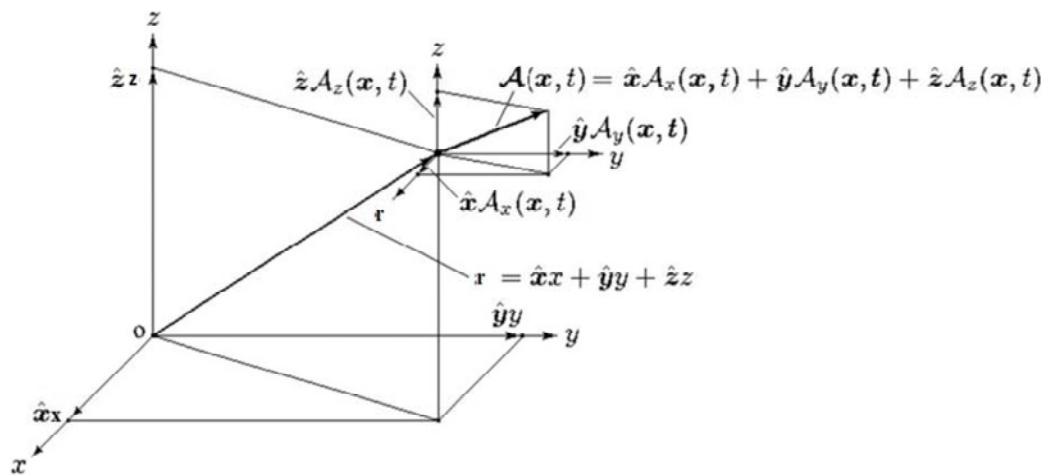


3

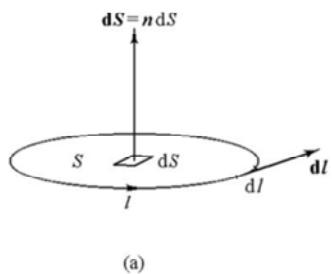
Ghidurile cilindrice dielectrice pentru unde milimetrice pot fi realizate dintr-un simplu fir dielectric cu secțiune circulară, ca în Fig.(a). Fibra optică constă dintr-un miez dielectric cu indicele de refractivă n_1 și o teacă dintr-un material dielectric diferit, al cărui indice de refractivă n_2 este ușor mai mic decât n_1 , ca în Fig.(b). Într-o asemenea configurație, pentru starea de unde ghidată, condiția de reflexivitate totală este satisfăcută și cimpurile sunt confinăte în principal în miez.

Pentru modurile ghidate, cimpurile în miez sunt unde staționare radiale cu dependență spatială de tip Bessel, în timp ce cimpurile din teacă sunt cimpuri radiale amortizate cu dependență spatială de tip Bessel modificat. Grosimea tecii este suficient de mare astfel încât cimpurile în afara suprafeței tecii sunt practice nule. Din acest motiv putem presupune că teaca se extinde la infinit, astfel încât modelul fizico-matematic al fibrei cu salt de indice ca și al ghidului cilindric dielectric este cel din Fig.(c).

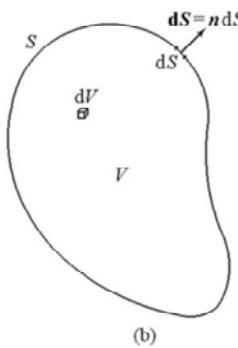
Vector de pozitie si functie vectoriala



Ecuatiile lui Maxwell in vid



(a)



(b)

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \times (\mathbf{B} / \mu_0) = \partial (\epsilon_0 \mathbf{E}) / \partial t + \mathbf{J} \\ \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

$$q(t) = \iiint_V \rho(\mathbf{r}, t) dV$$

$$I(t) = \iint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial \rho / \partial t$$

$$I(t) = -dq(t) / dt$$

5

\mathbf{E} = cimpul electric masurat in (V/m)

\mathbf{H} = cimpul magnetic masurat in (A/m)

\mathbf{B} = inductia magnetica masurata in (Wb/m^2) sau (T). 1T = 1(Wb/m^2)

\mathbf{D} = inductia electrica masurata in (C/m^2)

ρ = densitatea volumetrica de sarcina electrica , masurata in (C/m^3)

\mathbf{J} = densitatea superficiala (de suprafata) de current, masurata in (A/m^2)

ϵ_0 = permitivitatea vidului = $(1/36\pi) \times 10^{-9}$ F/m

μ_0 = permisiabilitatea vidului = $4\pi \times 10^{-7}$ H/m

Ecuatiile lui Maxwell in material

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \\
 \nabla \times (\mathbf{B} / \mu_0) = \partial (\epsilon_0 \mathbf{E}) / \partial t + \mathcal{J}_f + \mathcal{J}_P + \mathcal{J}_M \\
 \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_f + \rho_P \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} = 0
 \end{array}
 \right. \quad \left. \begin{array}{l}
 \rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} \\
 \mathcal{J}_f = \sigma \mathbf{E} \\
 \mathcal{J}_P = \partial \mathbf{P} / \partial t \\
 \mathcal{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} \\
 \mathbf{B} / \mu_0 - \mathbf{M} = \mathbf{H} \\
 \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \mathbf{D}
 \end{array} \right.$$

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \\
 \nabla \times (\mathbf{B} / \mu_0) - \nabla \times \mathbf{M} = \partial (\epsilon_0 \mathbf{E}) / \partial t + \partial \mathbf{P} / \partial t \\
 \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) + \nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_f \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} = 0
 \end{array}
 \right. \quad \boxed{\left. \begin{array}{l}
 \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \\
 \nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathcal{J}_f \\
 \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} = 0
 \end{array} \right.}$$

6

ρ_f = densitatea de sarcina libera

ρ_P = densitatea de sarcina produsa de polarizatia electrica a mediului. Polarizatia este cauzata de alinierea momentelor dipolilor electrici

J_f = densitate de curent liber care include curentul de conductie si curentul de convective

J_P = densitatea de curent de polarizatie, produs de variatia in timp a polarizatiei electrice. Curentul de polarizatie se datoreste variatiei in timp a densitatii volumetrice a momentelor dipolilor electrici, P .

J_M = densitatea de current molecular, produs de variatia in timp a densitatii volumetrice a momentelor de dipol magnetic, M .

σ = conductivitatea, masurata in (S/m)

Materiale simple = nedispersive, liniare, izotrope

$$P = \epsilon_0 \chi_e E$$

$$M = \chi_m H$$

$$\mathcal{D} = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi_e E = \epsilon_0 (1 + \chi_e) E = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon E$$

$$\mathcal{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) H = \mu_0 \mu_r H = \mu H$$

$$\begin{cases} \nabla \times E = -\mu \partial H / \partial t \\ \nabla \times H = \epsilon \partial E / \partial t + \sigma E + J \\ \nabla \cdot E = \rho / \epsilon \\ \nabla \cdot H = 0 \end{cases}$$

7

In cazul materialelor simple, polarizatia P este paralela si proportional cu cimpul electric E, iar magnetizatia M este paralela si proportional cu cimpul magnetic H.

χ_e = susceptibilitatea electrica, adimensionala

χ_m = susceptibilitatea magnetica, adimensionala;

J = densitatea de current, altul decit curentul de conductie, care nu este proportional cu cimpul electric. (de exemplu, curentul de convective sau curentul independent de cimpul electric, denumit current imprimat.)

Ecuatiile lui Maxwell in domeniul frecventa-1

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{A}(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \phi) = \Im[\mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{j\phi} e^{j\omega t}] = \Im[\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] \\ \mathcal{A}(\mathbf{r}, t) &= \hat{\mathbf{x}} \underline{A}_x(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{y}} \underline{A}_y(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{z}} \underline{A}_z(\mathbf{r}, t) = \\ &= \hat{\mathbf{x}} A_x(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \phi_x) + \hat{\mathbf{y}} A_y(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \phi_y) + \hat{\mathbf{z}} A_z(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \phi_z) = \\ &= \Im[\hat{\mathbf{x}} \underline{A}_x(\mathbf{r}) e^{j\phi_x} e^{j\omega t} + \hat{\mathbf{y}} \underline{A}_y(\mathbf{r}) e^{j\phi_y} e^{j\omega t} + \hat{\mathbf{z}} \underline{A}_z(\mathbf{r}) e^{j\phi_z} e^{j\omega t}] = \\ &= \Im\{\hat{\mathbf{x}} \underline{A}_x(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{y}} \underline{A}_y(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{z}} \underline{A}_z(\mathbf{r})\} e^{j\omega t} \\ \underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) &= \hat{\mathbf{x}} \underline{A}_x(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{y}} \underline{A}_y(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{z}} \underline{A}_z(\mathbf{r}) = \Re[\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r})] + j \Im[\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r})] \\ \mathcal{A}(\mathbf{r}, t) &= \Im[\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] = \Re[\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r})] \sin \omega t + \Im[\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r})] \cos \omega t\end{aligned}$$

8

$\mathbf{A}(\mathbf{r})$ = amplitudinea complexă a semnalului armoniic $A(r,t)$. Este o funcție vectorială complexă.

Ecuatiile lui Maxwell in domeniul frecventa

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \Im[\underline{A}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}]}{\partial t} = \Im[\underline{A}(\mathbf{r}) j\omega e^{j\omega t}]$$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_f \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \end{aligned} \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega \epsilon \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega \rho$$

Medii lipsite de surse

$$\rho = 0$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases} \quad \sigma \ll \omega\epsilon \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases}$$

10

Conditia $\sigma \ll \omega\epsilon$ este conditia pentru medii cu conductibilitate scaduta si functionind la frecvente mari.

Medii dispersive

$$\mathcal{D} = \varepsilon E + \varepsilon_1 \partial E / \partial t + \varepsilon_2 \partial^2 E / \partial t^2 + \varepsilon_3 \partial^3 E / \partial t^3 + \dots$$

$$\mathcal{B} = \mu H + \mu_1 \partial H / \partial t + \mu_2 \partial^2 H / \partial t^2 + \mu_3 \partial^3 H / \partial t^3 + \dots$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + j\omega \varepsilon_1 \mathbf{E} - \omega^2 \varepsilon_2 \mathbf{E} - j\omega^3 \varepsilon_3 \mathbf{E} + \dots$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + j\omega \mu_1 \mathbf{H} - \omega^2 \mu_2 \mathbf{H} - j\omega^3 \mu_3 \mathbf{H} + \dots$$

$$\mathbf{D} = (\varepsilon - \omega^2 \varepsilon_2 + \dots) \mathbf{E} - j(-\omega \varepsilon_1 + \omega^3 \varepsilon_3 - \dots) \mathbf{E} = [\varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega)] \mathbf{E} = \underline{\varepsilon}(\omega) \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = (\mu - \omega^2 \mu_2 + \dots) \mathbf{H} - j(-\omega \mu_1 + \omega^3 \mu_3 - \dots) \mathbf{H} = [\mu'(\omega) - j\mu''(\omega)] \mathbf{H} = \underline{\mu}(\omega) \mathbf{H}$$

$$\underline{\varepsilon} = |\underline{\varepsilon}| e^{-j\delta} = |\underline{\varepsilon}| \cos \delta - j |\underline{\varepsilon}| \sin \delta$$

$$\tan \delta = \varepsilon'' / \varepsilon'$$

$$\underline{\mu} = |\underline{\mu}| e^{-j\theta} = |\underline{\mu}| \cos \theta - j |\underline{\mu}| \sin \theta$$

$$\tan \theta = \mu'' / \mu'$$

11

Medii disperzive (2)

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \underline{\mu}(\omega) \mathbf{H} = -j\omega \mu' \mathbf{H} - \omega \mu'' \mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega \underline{\epsilon}(\omega) \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J} = j\omega \epsilon' \mathbf{E} + \omega \epsilon'' \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \underline{\epsilon}(\omega) \mathbf{E} = \nabla \cdot (\epsilon' - j\epsilon'') \mathbf{E} = \rho \\ \nabla \cdot \underline{\mu}(\omega) \mathbf{H} = \nabla \cdot (\mu' - j\mu'') \mathbf{H} = 0 \end{cases}$$

12

$\omega \epsilon'' E$ si σE sunt termeni de acelasi tip care descriu disipatia mediului; primul exprima disipatia cauzata de polarizatia alternative, adica pierderile dielectrice, iar al doilea exprima disipatia cauzata de curentul de conductie, adica disipatia Joule. Similar, $\omega \mu'' H$ exprima disipatia datorita magnetizarii alternative, adica pierderile prin histerezis.

Curenti si sarcini magnetice

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t - \mathbf{J}_m \\ \nabla \times (\mathbf{B}/\mu_0) = \partial(\epsilon_0 \mathbf{E}) / \partial t + \mathbf{J} \\ \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \end{cases}$$

13

P. Dirac a argumentat theoretic posibilitatea existentei monopolilor magnetici .

Cu toate acestea, in electromagnetismul aplicat, utilizarea sarcinilor magnetice fictive sau curentilor magnetici fictivi poate ajuta la analiza multor problem ingineresti. Vom utiliza acest lucru in formularea conditiilor pe frontier pentru diverse situatii practice.

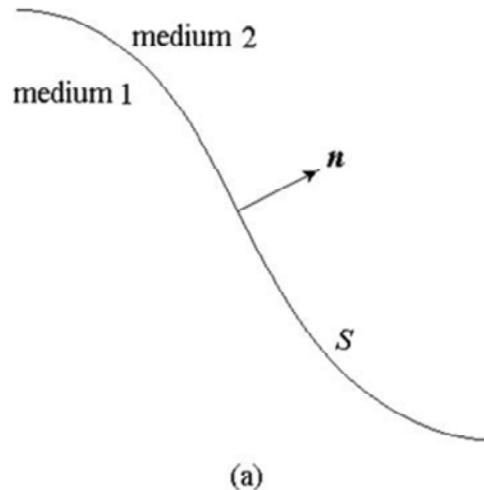
ρ_m = densitatea volumetrica de sarcina magnetica fictiva

J_m = densitatea de suprafata a curentului magnetic fictiv.

De not ca J_m , rezultatul deplasarii sarcinii magnetice fictive, este complet diferit de densitatea curentului molecular, J_M , care este current electric datorat magnetizarii.

Conditii pe frontiera

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = -\mathbf{J}_{ms} \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \rho_{ms} \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -j\omega\rho_s \\ \mathbf{n} \cdot (\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1) = -\partial\rho_s/\partial t \end{cases}$$



(a)

14

Comportamentul cimpului electromagnetic pe frontier sau la interfata dintre doua medii este important in solutionarea problemelor electromagnetice.

In teoria macroscopica, frontier este considerate o suprafata geometrica.

Ecuatiile lui Maxwell in forma diferențială sunt aplicabile doar cimpurilor care sunt functii continue si differentiabile. Functiile cimp si derivatele lor sunt discontinue la traversarea frontierei dintre doua medii.

La traversarea frontierei dintre doua medii , cimpurile trebuie sa satisfaca conditiile de frontier din slide.

n = vectorul unitar normal la frontier si avind sensul de la mediul 1 spre mediul 2

J_s = densitatea de current de suprafata in A/m^2

ρ_s = densitatea de suprafata de sarcina, in C/m^2 .

J_{ms} = densitate de suprafata de current magnetic fictiv

ρ_{ms} = densitate de suprafata de sarcina magnetica fictiva

De remarcat ca in ρ_s si J_s sunt incluse doar sarcini de suprafata libere si current de suprafata de conductie si nu current molecular sau de sarcini legate.

Perete electric

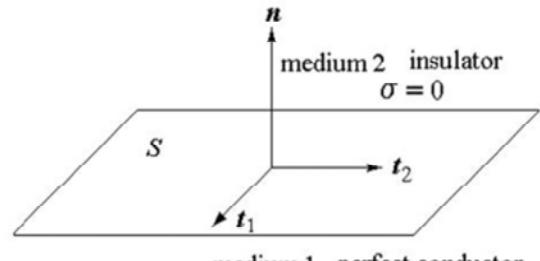
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \rho_s$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{E}_t|_S = 0 \\ \mathbf{H}_t|_S \neq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \mathbf{E}_1 = \mathbf{H}_1 = \mathbf{D}_1 = \mathbf{B}_1 = 0 \\ \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}, \quad \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{B} \end{cases}$$

(b)

15

Intr-un conductor perfect sarcinile libere se distribuie pe suprafata conductorului in asa fel incit nici un cimp electric sa nu egziste in interiorul conductorului, iar in exterior cimpul electric sa fie normal pe suprafata conductorului. Aceasta este starea de echilibru electrostatic, care nu depinde de conductivitate, doar timpul pina cind se atinge aceasta stare, numit timp de relaxare, este invers proportional cu conductivitatea mediului.

Pentru cimpuri variabile in timp, in conductor exista si cimp electric si cimp magnetic sub forma de unde amortizate. Aceste cimpuri din interiorul conductorului dispar complet doar cind conductivitatea materialului este infinita; in aceasta situatie avem un conductor perfect.

Daca consideram o suprafata cu un vector unitar normal n indreptat spre exteriorul unui conductor perfect, unde avem un mediu isolator, ca in Fig.b, sarcinile din interiorul conductorului sunt asa de mobile incit timpul de relaxare este foarte mic si sarcinile se deplaseaza instantaneu spre suprafata conductorului, concentrindu-se intr-un strat infinit de subtile pe suprafata conductorului perfect. Se produce astfel o densitate de suprafata de sarcina ps. Cimpul electric va fi nul in interiorul conductorului, iar in exterior va fi normal la suprafata conductorului.

Conform ecuatiilor lui Maxwell, nu putem avea un cimp magnetic variabil in timp singur, fara sa avem un cimp electric. Deci, in interiorul conductorului nu vom avea cimp magnetic, iar cimpul magnetic in exterior va trebui sa fie tangent la suprafata conductorului.

Curentii de conductie vor curge printr-un strat infinit subtire de la suprafata conductorului, astfel formindu-se o densitate de suprafata de current, Js, pe suprafata conductorului perfect.

In concluzie, cimpurile in mediul 1, conductorul perfect, vor fi nule, iar in mediul 2, izolatorul, vor fi nenule.

Orice suprafata pe care componenta tangentiala a cimpului electric este zero, iar componenta tangentiala a cimpului magnetic este non-nula, se numeste perete electric. Suprafata unui conductor perfect se comporta ca un perete electric.

Componenta tangentiala a cimpului electric pe suprafata peretelui electric este zero, ceea ce inseamna ca componenta tangentiala a cimpului electric satisface o conditie de frontieră de tip Dirichlet, iar componenta tangentiala a cimpului magnetic este nulă.

Perete magnetic

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} &= 0 \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H} &= 0 \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} &= -\mathbf{J}_{ms} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} &= \rho_{ms}\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{E}_t|_S \neq 0 \\ \mathbf{H}_t|_S = 0 \end{cases}$$

16

Orice suprafață pe care componenta tangențială a cimpului magnetic este zero, iar componenta tangențială a cimpului electric este non-nula, se numește perete magnetic.
În acest caz, există o sarcină magnetică de suprafață, ρ_{ms} și un current magnetic de suprafață, J_{ms} . Ecuatiile pe frontieră sunt cele din slide.

Dacă considerăm frontieră dintre un mediu care este vidul și un mediu dielectric cu permisivitate mare, atunci suprafața vazută privind spre vid poate fi aproximată cu un perete electric, iar suprafața vazută privind spre dielectricul de mare permisivitate poate fi aproximată cu un perete magnetic.

Suprafata impedanta/admitanta

$$Z_s = \frac{E_t}{H_t} \quad Y_s = \frac{1}{Z_s} = \frac{H_t}{E_t}$$

17

In cazul general, exista component tangentiala atit pentru cimpul electric cit si pentru cimpul magnetic. Raportul acestor componente defineste impedanta de suprafata, Zs, iar acest tip de suprafata se numeste suprafata impedanta.

Ecuatia undelor in domeniul timp - medii simple-

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (1)$$

Ecuatii de unda neomogene

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbf{J} \quad (2)$$

Medii fara excitatii, conductivitate mica, frecventa mare:

$$\rho = 0, \mathbf{J} = 0, \sigma \approx 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

Ecuatii de unda omogene

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

Medii fara excitatii, conductivitate mare, frecventa mica:

$$\rho = 0, \mathbf{J} = 0, \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

Ecuatii de difuzie omogene

18

Ecuatiile lui Maxwell sunt ecuatii diferențiale vectoriale de ordinal 1, care descriu interacțiunea dintre cimpurile electric și magnetic.

Ecuatiile de undă se deduc din ecuațiile lui Maxwell și sunt ecuatii diferențiale partiale vectoriale de ordin 2. Ele ne dau dependența de spațiu și timp a fiecarui cimp vectorial. Ele explică și natura ondulatorie a cimpului electromagnetic.

In mediul omogen, nedisipativ, izotrop și linear, ϵ și μ sunt constante. Un astfel de mediu este un mediu simplu. Ecuatiile 1-2 sunt ecuatii de unda neomogene. Ele sunt ecuatii in domeniul timp. In membrul drept, ρ și \mathbf{J} sunt densitate de sarcini electrice libere și densitate de curenti de conductie. In membrul stang, termenii in derivate de ordin 2 in raport cu timpul sunt termenii oscilatorii sau de undă, iar termenii in derivate de ordinal 1 in raport cu timpul sunt termenii amortizati.

Intr-o regiune lipsita de excitatii, intr-un mediu de conductivitate mica, si pentru variații rapide in timp ale cimpurilor, avem ecuațiile 3-4, care sunt ecuatii de unda omogene. Intr-un mediu cu conductivitate mare, si cu variații lente in timp ale cimpurilor, termenii cu derivate de ordin 2 pot fi neglijati si obtinem ecuatii omogene de difuzie. Solutiile acestor ecuatii sunt cimpuri amortizate si nu ondulatorii, cunoscute sub numele de cimpuri lent variabile in timp sau cimpuri quasi-stationare.

Avem două ecuatii independente pentru \mathbf{E} si pentru \mathbf{H} ; totuși, \mathbf{E} si \mathbf{H} sunt dependente unul de altul prin ecuațiile lui Maxwell.

Cimpurile stationare sunt cele care nu depend de timp. In acest caz, ecuația de undă devine ecuație de tip Poisson, iar cimpul electric și magnetic, nedepinzând de timp, sunt complet independente unul de altul, fără să interacționeze.

Ecuatia undelor in domeniul frecventa - medii simple-

$$\nabla^2 \mathbf{E} - j\omega\mu\sigma\mathbf{E} + \omega^2\mu\epsilon\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon}\nabla\rho + j\omega\mu\mathbf{J} \quad (1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - j\omega\mu\sigma\mathbf{H} + \omega^2\mu\epsilon\mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J} \quad (2)$$

$$k^2 = \omega^2\epsilon\mu - j\omega\mu\sigma$$

Ecuatii de unda

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon}\nabla\rho + j\omega\mu\mathbf{J} \quad (3)$$

Complexe, neomogene

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J} \quad (4)$$

$$\rho = 0, \mathbf{J} = \mathbf{0}$$

$$\text{Ecuatii} \quad \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (5)$$

$$\text{Helmholtz} \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (6)$$

19

Pentru cimpuri variabile sinusoidal in timp, ecuatiile de unda pot fi scrise in complex, 1-4.

Pentru medii lipsite de excitatii, ecuatiile de unda complexe devin ecuatii de unda complexe omogene, 5-6, numite si ecuatiile lui Helmholtz.

In mediile cu conductivitate scazuta si la frecvente mari, $\sigma \ll \omega\epsilon$, si $k^2 = \omega^2\epsilon\mu$.

In medii cu conductivitate mare si la frecvente mici, $\sigma \gg \omega\epsilon$, si $k^2 = -j\omega\sigma\mu$. In acest caz, ecuatiile 3-6 devin ecuatii complexe de difuzie.

De remarcat ca ecuatiile de unda in domeniul timp sunt potrivite pentru vid sau medii nedisipative, in timp ce ecuatiile de unda complexe in domeniul frecventa sunt potrivite pentru medii dispersive, la care permitivitatea si permiabilitatea sunt functii de frecventa. Pentru medii cu pierderi de polarizare sau de magnetizare, permitivitatea sau permiabilitatea sunt marimi complexe.

Rezolvarea ecuatiei Helmholtz

- Probleme mixte
- Probleme de valori initiale
- Probleme de valori pe frontiera

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (6)$$

20

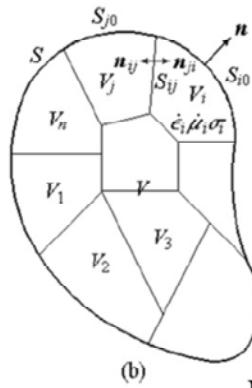
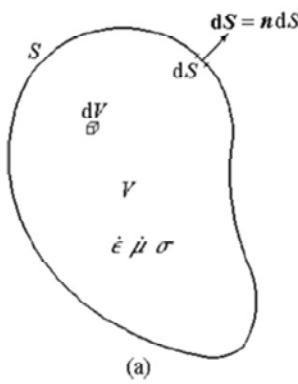
Ecuatia undelor si ecuatiile Helmholtz sunt ecuatii diferențiale partiale vectoriale 3D. În general există 3 clase de probleme în legătura cu aceste ecuații:

- Probleme mixte = problemă cu valori initiale și pe frontieră impuse
- Probleme de valori initiale = problemă fără valori pe frontieră; frontierele sunt considerate suficiente de îndepărtate de regiunea de interes astfel încit influența lor să poată fi neglijată.
- Probleme de valori pe frontieră = problemă fără valori initiale; momentul initial de timp este considerat suficient de îndepărtat de perioada de timp de interes astfel încit influența valoarei initiale să poată neglijată.

Noi vom căuta Solutia generală pentru problemă de valori pe frontieră a cimpurilor tri-dimensionale și variabile în timp.

Ecuatia Helmholtz poate fi redusă la trei ecuatii cu derivate partiale scalare tri-dimensionale și apoi, printr-o alegere corespunzătoare a sistemului de coordinate, ele pot fi reduse la trei ecuatii diferențiale ordinare scalare unidimensionale folosind metoda separării variabilelor. Aceste ecuatii diferențiale ordinare, cu condițiile de frontieră impuse, vor fi rezolvate în final; aceasta ultima etapă înseamnă rezolvarea unei probleme de valori proprii sau o problema de tip Sturm-Liouville

Teoreme de unicitate



$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} \Big|_S$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} \Big|_S$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_i \Big|_{S_{ij}} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_j \Big|_{S_{ij}}$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_i \Big|_{S_{ij}} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_j \Big|_{S_{ij}}$$

21

Pentru rezolvarea unei probleme de valori pe frontier pentru ecuațiile Helmholtz, se pune întrebarea care sunt condițiile pe frontier care să asigure unicitatea soluției în interiorul volumului delimitat de frontieră.

În regim sinusoidal stationar, în volumul V , înconjurat de suprafața S , ecuațiile Helmholtz au soluție unică dacă următoarele condiții sunt indeplinite:

(a)

1. Sursele J și J_m sunt date în orice punct din V , inclusive în cazul problemei libere de surse ($J=0$ și/sau $J_m=0$)
2. Componentele tangențiale ale cimpului electric sau componenta tangențială a cimpului magnetic este dată pe frontieră S a volumului V .

(b)

1. Sursele J_i și J_{mi} trebuie să fie cunoscute în fiecare punct al oricărei subregiuni V_i .
2. Componenta tangențială a cimpului electric sau componenta tangențială a cimpului magnetic trebuie să fie date în orice punct pe suprafața $S = \sum S_{ij}$.
3. Componentele tangențiale ale cimpului electric și componente tangențiale ale cimpului magnetic trebuie să fie continue la traversarea frontierei S_{ij} (asa numita condiție de adaptare a cimpurilor).

Sistemul de coordinate curbilinii

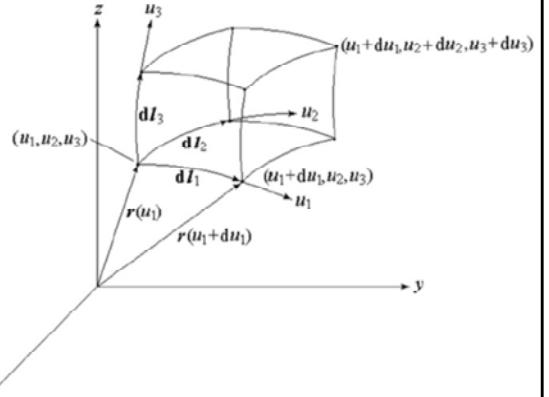
$$f(x, y, z) = u \quad (1)$$

$$\left\{ f_1(x, y, z) = u_1 \right.$$

$$\left\{ f_2(x, y, z) = u_2 \quad (2) \right.$$

$$\left\{ f_3(x, y, z) = u_3 \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\mathbf{l}_i = \mathbf{r}(u_i + du_i) - \mathbf{r}(u_i) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} du_i \\ dl_i = |d\mathbf{l}_i| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right| du_i \end{array} \right. \quad (3)$$



22

Solucionarea unei ecuatii diferențiale partiale depinde de alegerea sistemului de coordinate.

Sistemul de coordinate curbilinii ortogonale este un sistem tridimensional de coordinate care constă în trei suprafete curbe ortogonale. O suprafață curba este definită în 3D prin ecuația (1), în care u este o constantă. Familia de trei suprafete mutual ortogonale este definită în ecuația (2).

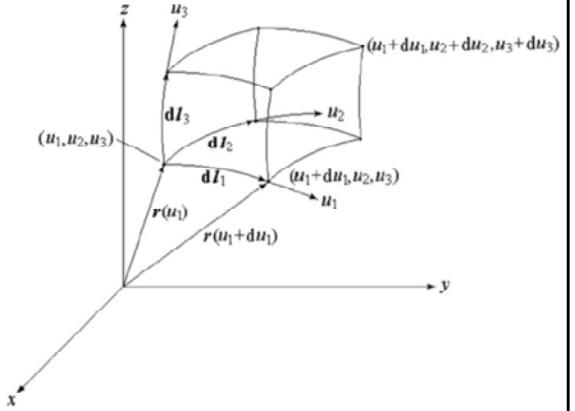
Intersecția a trei astfel de suprafete, cîte una din fiecare familie, definește un punct în spațiu, care poate fi descris prin tripla (u_1, u_2, u_3) . Astfel, $u_i, i = 1, 2, 3$, sunt numite coordonatele ortogonale curbilinii ale acestui punct.

Direcția perpendiculară pe o suprafață de constantă u_i este axa coordinatei curbilinii u_i .

Cind coordonata curbilinie variază de la u_i la $u_i + du_i$, în lungul axei de coordinate, elementul linear corespunzător dl_i este dat de ecuațiile (3).

Sistemul de coordinate curbilinii - 2

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \hat{\mathbf{x}}_j \\ \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right| = \sqrt{\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_i} \right)^2} = h_i \end{cases} \quad (4)$$



23

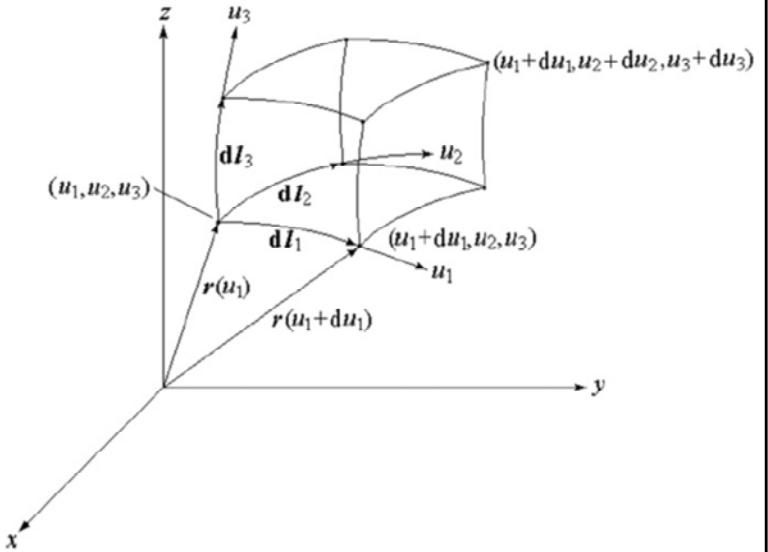
Coefocoentii hi se numes*coeficientii Lame sau factori de scara.*

Sistemul de coordinate curbilinii - 3

$$\begin{cases} d\mathbf{l}_i = \hat{\mathbf{u}}_i h_i du_i \\ dl_i = h_i du_i \end{cases} \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \frac{d\mathbf{l}_i}{dl_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_i \cdot \hat{\mathbf{u}}_j = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_j} = 0 \end{cases} \quad (6)$$



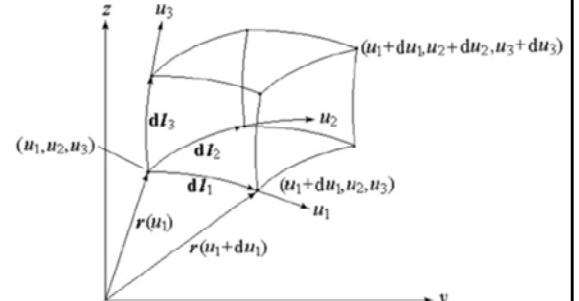
24

Coeficientii hi se numescoeficientii Lame sau factori de scara. Vectorul element de linie devine ecuatia (5). Vesorul coordonatei ui este dat de relatia a treia din (5). Conditia de ortogonalitate a coordonatelor este data de ecuațiile (6).

Sistemul de coordinate curbilinii - 4

$$\begin{cases} d\mathbf{S}_i = d\mathbf{l}_j \times d\mathbf{l}_k = \mathbf{u}_i h_j h_k du_j du_k \\ dS_i = h_j h_k du_j du_k \\ \hat{\mathbf{u}}_i = \hat{\mathbf{u}}_j \times \hat{\mathbf{u}}_k \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} dV = d\mathbf{l}_i \cdot d\mathbf{l}_j \times d\mathbf{l}_k = h_i h_j h_k du_i du_j du_k = \\ = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 = \sqrt{g} du_1 du_2 du_3 \end{cases} \quad (8)$$



25

Vectorul element de suprafață dS_i , în coordinate curbilinii ortogonale, este dat de ecuația (7), iar elemental de volum, dV , în ecuația (8).

Sistemul de coordinate curbilinii - 5

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \varphi = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{u}}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} (h_j h_k A_i) \\ \nabla \times \mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{u}}_i \frac{1}{h_j h_k} \left[\frac{\partial}{\partial u_j} (h_k A_k) - \frac{\partial}{\partial u_k} (h_j A_j) \right] \\ \nabla^2 \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_j h_k}{h_i} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \right) \end{array} \right. \quad (9)$$

26

Operatorii vectoriali diferențiale, gradiet, divergentă, rotor și laplacian, în coordinate curbilinii ortogonale, sunt date în ecuațiile (9)

Rezolvarea ecuatiei vectoriale Helmholtz in coordinate curbilinii ortogonale

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (2)$$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu - j \omega \mu \sigma \quad (3)$$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu - j \omega \mu \sigma \xrightarrow{\sigma \approx 0} \omega^2 \epsilon \mu \quad (4)$$

27

In medii fara pierderi si la frecventa mare, $\sigma \ll \omega \epsilon$, deci putem considera $\sigma \approx 0$, iar ϵ si μ reale, astfel incit $k = \omega * \text{sqr}(\epsilon \mu)$.

Ecuatia Helmholtz vectoriala tridimensională poate fi redusa la trei ecuatii scalare tot de tip Helmholtz, iar cele trei componente ale cimpului pot fi separate in trei ecuatii, doar in coordinate carteziene. In orice alt sistem orthogonal de coordinate, ecuatia vectoriala tri-dimensională Helmholtz se va reduce la trei ecuatii scalare complicate, iar cele trei componente ale cimpului nu pot fi separate in trei ecuatii.

In acest context, există 3 metode de a reduce ecuatia vectoriala 3D de tip Helmholtz in trei ecuatii scalare de tip Helmholtz:

- Metoda potențialelor Borgnis
- Metoda potențialelor vector ale lui Hertz
- Metoda componentelor longitudinale.

Toate metodele functioneaza doar cind anumite conditii sunt indeplinite si depend de sistemul de coordinate ales pentru rezolvarea ecuatiilor.

Metoda potențialelor Borgnis

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (2)$$

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{u}}_1 E_1 + \hat{\mathbf{u}}_2 E_2 + \hat{\mathbf{u}}_3 E_3 \quad (3)$$

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{u}}_1 H_1 + \hat{\mathbf{u}}_2 H_2 + \hat{\mathbf{u}}_3 H_3 \quad (4)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 E_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2 E_2) = -j\omega\mu h_2 h_3 H_1 \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 E_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(h_3 E_3) = -j\omega\mu h_3 h_1 H_2 \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 E_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 E_1) = -j\omega\mu h_1 h_2 H_3 \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2 H_2) = j\omega\epsilon h_2 h_3 E_1 \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(h_3 H_3) = j\omega\epsilon h_3 h_1 E_2 \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 H_1) = j\omega\epsilon h_1 h_2 E_3 \right. \quad (10)$$

28

Intr-o regiune lipsita de excitatii, la frecvente mari si pierderi mici, ecuatiile lui Maxwell sunt (1)-(2).

Ecuatiile pot fi descompuse in ecuatiile componentelor daca se alerge un anumit sistem de coordinate curbilinii ortogonale u1, u2, u3. In acest sistem de coordinate, vectorii cimp sunt exprimati prin componente lor ca in ecuatiile (3)-(4).

Ecuatiile lui Maxwell (1)-(2) devin 6 ecuatii scalare in componente, (5)-(10).

Principiile potențialelor Bergnis constau din doua teoreme.

Metoda potențialelor Borgnis

Teorema 1

$$h_3 = 1, \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1}{h_2} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 U}{\partial u_3 \partial u_1} - j\omega\mu \frac{1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial u_2} \quad (2) \\ E_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 U}{\partial u_2 \partial u_3} + j\omega\mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u_1} \quad (3) \\ E_3 = \frac{\partial^2 U}{\partial u_3^2} + k^2 U \quad (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 V}{\partial u_3 \partial u_1} + j\omega\varepsilon \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial u_2} \quad (5) \\ H_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 V}{\partial u_2 \partial u_3} - j\omega\varepsilon \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial u_1} \quad (6) \\ H_3 = \frac{\partial^2 V}{\partial u_3^2} + k^2 V \quad (7) \end{cases}$$

29

Teorema 1

θ_i

Dacă sistemul de coordinate ortogonale u_1, u_2, u_3 , cu coeficientii Lame h_1, h_2, h_3 , stătătăcănd condițiile (1), atunci pot fi gasite două funcții scalare, $U(r)$ și $V(r)$, denumite **potențiale Borgnis**, astfel încât E_3 să fie o funcție doar de U și H_3 o funcție doar de V , iar toate celelalte componente să fie exprimate prin relațiile (2)-(7).

Metoda potențialelor Borgnis

Teorema 1 – cont.

$$\nabla_T^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial u_3^2} + k^2 U = 0 \quad (8)$$

$$\nabla_T^2 V + \frac{\partial^2 V}{\partial u_3^2} + k^2 V = 0 \quad (9)$$

$$\nabla_T^2 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \right) \right] \quad (10)$$

30

Funcțiile $U(r)$ și $V(r)$ sunt cunoscute sub numele de funcții de undă scalare, care satisfac ecuațiile diferențiale partiale de ordinal doi (8)-(9), unde Laplacianul bi-dimensional, în raport cu u_1 și u_2 este dat de (10).

De notat că ecuațiile (8)-(9) nu sunt în mod necesar ecuații Helmholtz.

Condiția $h_3 = 1$ înseamnă că cel puțin o direcție a sistemului de coordinate este liniară, iar cea de-a doua condiție înseamnă că forma funcțiilor h_1 și h_2 , în raport cu u_3 , este aceeași, astfel încât raportul lor este independent de u_3 .

Sistemul de coordinate cilindrice și sistemul de coordinate sferice satisfac Teorema 1.

Metoda potențialelor Borgnis

Teorema 2

$$\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2) = 0 \quad (11)$$

$$\begin{cases} \nabla^2 U + k^2 U = 0 & (12) \\ \nabla^2 V + k^2 V = 0 & (13) \end{cases}$$

$$(1) + (11) \rightarrow h_3 = 1, \frac{\partial h_1}{\partial u_3} = 0, \frac{\partial h_2}{\partial u_3} = 0 \quad (14)$$

31

Teorema 2

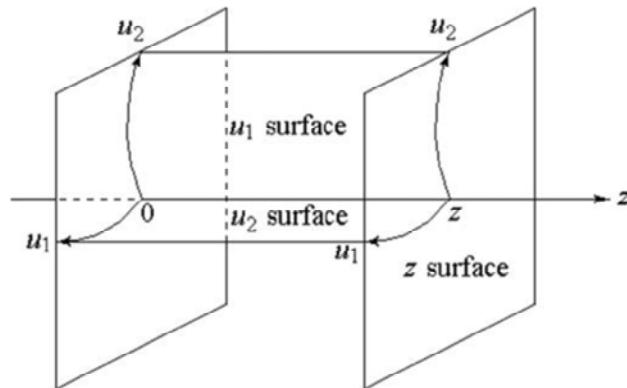
θ

Dacă sistemul de coordinate ortogonale satisfice Teorema 1 și suplimentar condiția (11), atunci funcțiile Borgnis U și V satisfac ecuațiile Helmholtz scalare și omogene (12)-(13).

Condițiile din Teorema 2 inseamnă că sunt valabile relațiile (14). Aceasta inseamnă că coeficientii Lame h_1 și h_2 depend doar de două coordinate u_1 și u_2 și sunt independenți de a treia coordonată u_3 .

Sistemul de coordinate care satisfice condițiile Teoremei 2 este sistemul de coordinate cilindrice

Sistemul arbitrar de coordinate cilindrice



$$\nabla^2 = \nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial u_3^2} = \nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$e^{j(\omega t \pm \beta z)} \quad \text{si} \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\beta^2 \quad (2)$$

$$\left\{ E_z = (k^2 - \beta^2)U = T^2V \quad (3) \right.$$

$$\left. H_z = (k^2 - \beta^2)V = T^2U \quad (4) \right.$$

$$\left\{ E_1 = -\frac{j\beta}{h_1} \frac{\partial U}{\partial u_1} - \frac{j\omega\mu}{h_2} \frac{\partial V}{\partial u_2} \quad (5) \right.$$

$$\left. E_2 = -\frac{j\beta}{h_2} \frac{\partial U}{\partial u_2} + \frac{j\omega\mu}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u_1} \quad (6) \right.$$

$$\left\{ H_1 = -\frac{j\beta}{h_2} \frac{\partial V}{\partial u_2} + \frac{j\omega\epsilon}{h_1} \frac{\partial U}{\partial u_1} \quad (7) \right.$$

$$\left. H_2 = -\frac{j\beta}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u_1} - \frac{j\omega\epsilon}{h_2} \frac{\partial U}{\partial u_2} \quad (8) \right.$$

32

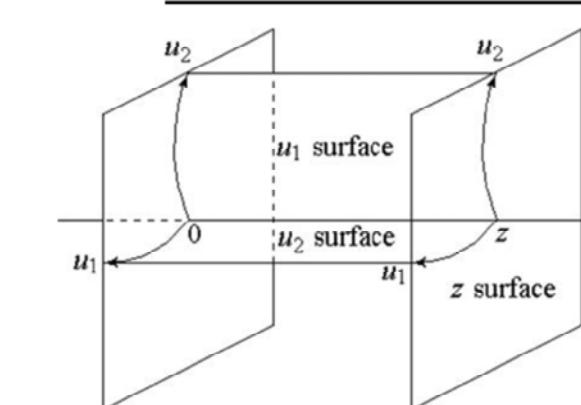
Intr-un sistem arbitrar de coordinate cilindrice, cel putin o axa este de coordinate carteziene, axa recunoscuta ca axa longitudinala, notata cu z. Fie $z = u_3$; atunci $h_z = h_3 = 1$, iar suprafetele pentru z -constant sunt plane paralele perpendicular pe axa z. Celelalte doua coordinate sunt curbe ortogonale bi-dimensionale in planele z -constant. Si sunt notate cu u_1 si u_2 , ca in Figura. Laplasianul se exprima prin relatia (1).

In sistemele cilindrice, cind undele sinusoidale se propaga in doua directii opuse in lungul axei longitudinale z, dependent cimpului de t si z este de forma relatiilor (2), unde β este coeficientul de faza longitudinal.

Expresiile componentelor longitudinale ale cimpurilor sunt (3) si (4), unde $T^2 = k^2 - \beta^2$ desemneaza numarul de unda unghiular transversal. Daca suntem interesati de unda care se propaga in directia pozitiva a axei +z, dependent de z devine $\exp(-j\beta z)$.

Expresiile componentelor cimpului din planul transversal pe axa longitudinala devin (5) – (8).

Sistemul arbitrar de coordinate cilindrice



$$\nabla^2 = \nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial u_3^2} = \nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$\nabla_T^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0 \quad (2)$$

$$U(u_1, u_2, z) = U_T(u_1, u_2) Z(z) \quad (3)$$

$$\frac{\nabla_T^2 U_T}{U_T} + \frac{d^2 Z/dz^2}{Z} = -k^2 \quad (4)$$

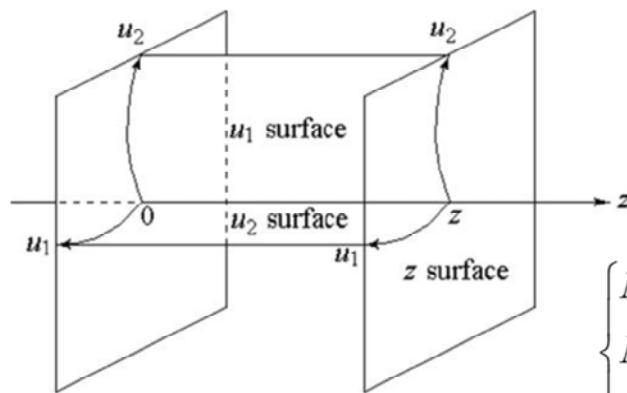
$$\begin{cases} \frac{d^2 Z/dz^2}{Z} = -\beta^2, \frac{\nabla_T^2 U_T}{U_T} = -T^2 \\ \beta^2 + T^2 = k^2, \beta = \sqrt{k^2 - T^2} \end{cases} \quad (5)$$

33

Intr-un sistem arbitrar de coordinate cilindrice, cel putin o axa este de coordinate carteziene, axa recunoscuta ca axa longitudinala, notata cu z. Fie $z = u_3$; atunci $h_z = h_3 = 1$, iar suprafetele pentru z -constant sunt plane paralele perpendicular pe axa z. Celelalte doua coordinate sunt curbe ortogonale bi-dimensionale in planele z -constant. Si sunt notate cu u_1 si u_2 , ca in Figura. Laplasianul se exprima prin relatia (1).

Functiile U si V satisfac ecuatia Helmholtz scalar (2). Aplicind metoda separarii variablelor, avem relatia (3) unde U_T desemneaza functia transversal si Z desemneaza functia longitudinala. Substituind (3) in (2) si impartind prin U obtinem reatia (4). Primul termen este o functie doar de u_1 si u_2 , iar al doilea termen este o functie doar de z . Fiecare din termeni trebuie sa fie egal cu o constanta astfel incit suma lor sa fie egala cu $-k^2$.

Sistemul arbitrar de coordinate cilindrice - 2



$$Z(z) = Z_1 e^{-j\beta z} + Z_2 e^{j\beta z} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \text{Modul TEM : } T^2 = 0 & (9) \\ \text{Moduri de unda rapida : } T^2 > 0 & (10) \\ \text{Moduri de unda lente : } T^2 < 0 & (11) \end{cases}$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \beta^2 Z = 0 \quad (6)$$

$$\nabla_T^2 U_T + T^2 U_T = 0 \quad (7)$$

34

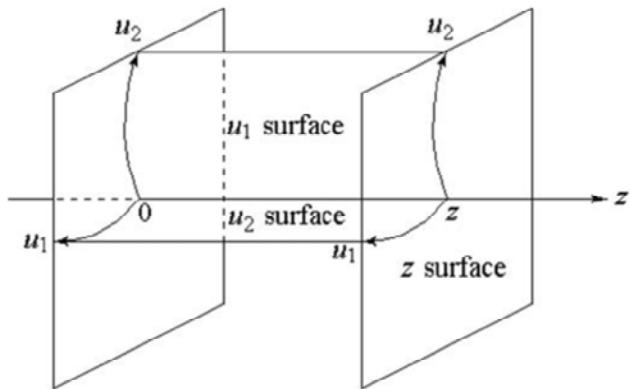
Ecuatia (6) este o ecuatie ~~diferentiala~~ ordinara omogena in z a carei solutie generala este suma a doua unde progressive care se propaga in lungul lui $+z$ si $-z$, numite unde ghidate (8), unde β este coeficientul de faza longitudinal care este determinat de $k = \omega * \text{sqr}(\epsilon\mu)$ si T .

Ecuatia (7) este o ecuatie Helmholtz scalar bi-dimensionalala cunoscuta sum numele de ecuatie transversal de unda si T^2 este valoarea proprie a ecuatiei determinata de conditiile pe frontier ale sistemului.

Undele ghidate dintr-un sistem cilindric marginit sunt clasificate in functie de valorile proprii T^2 :

- Modul TEM : $T^2 = 0$
- Moduri de unda rapida: $T^2 > 0$
 - A) $T^2 < k^2 \rightarrow \beta^2 = k^2 - T^2 > 0 \rightarrow \beta$ real si $\beta < k$. moduri propagative cu viteza de faza mai mare decit viteza luminii.
 - B) $T^2 > k^2 \rightarrow \beta^2 = k^2 - T^2 < 0 \rightarrow \beta$ imaginari. Moduri evanescente in lungul lui z .
 - C) $T^2 = k^2 \rightarrow \beta^2 = k^2 - T^2 = 0 \rightarrow$ modul critic; T este numarul de unda unghiular la taiere. $= kc = \omega c * \text{sqr}(\epsilon\mu)$.
- Moduri de unda lente: $T^2 < 0$

Sistemul arbitrar de coordinate cilindrice - 3



$$\begin{cases} E_z = (k^2 - \beta^2)U = T^2V & (12) \\ H_z = (k^2 - \beta^2)V = T^2U & (13) \end{cases}$$

$$E_1 = -\frac{j\beta}{h_1} \frac{\partial U}{\partial u_1} - \frac{j\omega\mu}{h_2} \frac{\partial V}{\partial u_2} \quad (14)$$

$$E_2 = -\frac{j\beta}{h_2} \frac{\partial U}{\partial u_2} + \frac{j\omega\mu}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u_1} \quad (15)$$

$$H_1 = -\frac{j\beta}{h_2} \frac{\partial V}{\partial u_2} + \frac{j\omega\varepsilon}{h_1} \frac{\partial U}{\partial u_1} \quad (16)$$

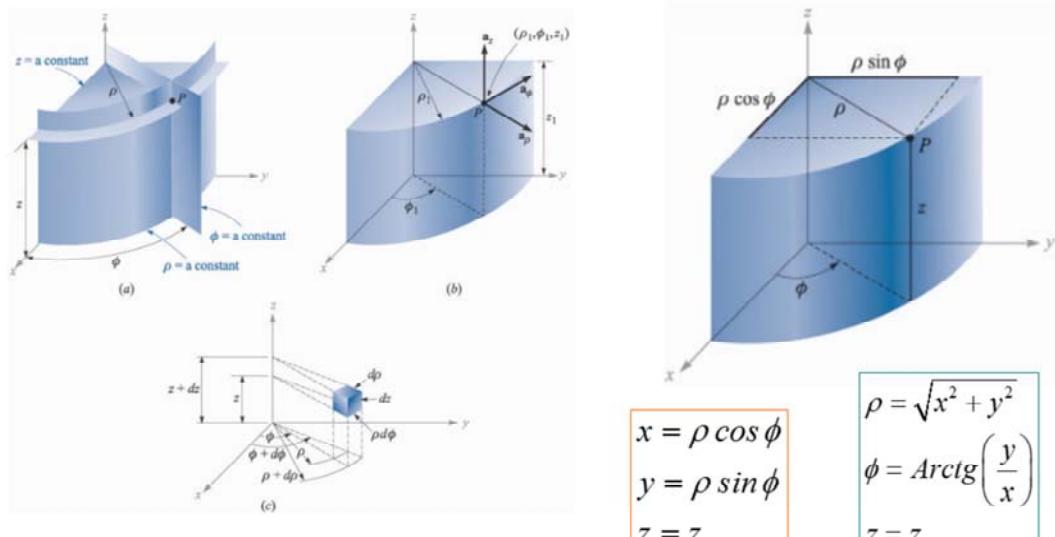
$$H_2 = -\frac{j\beta}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u_1} - \frac{j\omega\varepsilon}{h_2} \frac{\partial U}{\partial u_2} \quad (17)$$

35

Expresiile componentelor longitudinale ale cimpurilor sunt (12) si (13).

Expresiile componentelor cimpului din planul transversal pe axa longitudinala devin (14) – (17).

Sistemul de coordonate cilindrice circulare



$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi \\y &= \rho \sin \phi \\z &= z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \operatorname{Arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \\ z &= z\end{aligned}$$

36

Rezolvarea ecuatiei Helmholtz in coordonate cilindrice circulare

$$u_1 = \rho, u_2 = \phi, u_3 = z \Rightarrow h_1 = h_3 = 1, h_2 = \rho \quad (1)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U_T}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U_T}{\partial \phi^2} + T^2 U_T = 0 \quad (2)$$

$$U_T(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi) \quad (3)$$

$$\frac{\rho d(\rho dR/d\rho)/d\rho}{R} + \frac{d^2\Phi/d\phi^2}{\Phi} = -T^2 \rho^2 \quad (4)$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -\nu^2 \Phi \quad (5)$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + (T^2 \rho^2 - \nu^2) R = 0 \quad (6)$$

Pentru coordinate cilindrice circulare avem (1). Ecuatiile pentru UT (si VT, aceleasi) sunt ecuatii Helmholtz scalare (2). Aplicind metoda separarii variabilelor , relatia (3), folosind-o in ecuatie (2) si dupa impartirea cu ρ^2/UT , obtinem ecuatie (4). Ecuatie (4) poate fi separate in ecuatii (5) si (6).

Rezolvarea ecuatiei Helmholtz in coordonate cilindrice circulare - 2

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -\nu^2\Phi \quad (5)$$

$$\Phi(\phi) = c_\nu e^{j\nu\phi} + d_\nu e^{-j\nu\phi} = C_\nu \cos(\nu\phi) + D_\nu \sin(\nu\phi) \quad (7)$$

38

Ecuatia (5) este o ecuatie diferențiala ordinara ca și ecuatia pentru $Z(z)$. Solutia ei este (7)

Rezolvarea ecuatiei Helmholtz in coordonate cilindrice circulare - 3

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + (T^2 \rho^2 - \nu^2) R = 0 \quad (6)$$

$$x = T\rho$$

$$x \frac{d}{dx} \left[x \frac{dR(x)}{dx} \right] + (x^2 - \nu^2) R(x) = 0 \quad (8)$$

39

Daca in ecuatia (6) folosim relatia $x = T^* \rho$, atunci ecuatia (6) se transforma in ecuatia (8), forma standard a ecuatiei Bessel.

Solutii ale ecuatiei Bessel - v(niu) fractionar

$$x \frac{d}{dx} \left[x \frac{dR(x)}{dx} \right] + (x^2 - \nu^2) R(x) = 0$$

Functii Bessel

$$\begin{cases} J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m} \\ J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(-\nu+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2m} \end{cases} \quad (1)$$

Functii Neumann

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (2)$$

$$R(\rho) = a_\nu J_\nu(T\rho) + b_\nu J_{-\nu}(T\rho) \quad (3)$$

SAU

$$R(\rho) = A_\nu J_\nu(T\rho) + B_\nu N_\nu(T\rho) \quad (4)$$

40

Cind ν nu este intreg, ecuatia Bessel are ca solutii cele doua functii Bessel independente (1), pentru ordin pozitiv sau negativ, sau functiile Neumann (2).

In acest caz, solutia ecuatiei Bessel, $R(\rho)$, va fi relatia (3) sau (4).

Solutii ale ecuatiei de tip Bessel - v(niu) intreg

$$x \frac{d}{dx} \left[x \frac{dR(x)}{dx} \right] + (x^2 - n^2) R(x) = 0$$

$$\Gamma(n+m+1) = (n+m)! \quad si \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (5)$$

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(n+m)} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2m} \quad (6)$$

$$N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x) \right]_{\nu=n} \quad (7)$$

$R(\rho) = A_n J_n(T\rho) + B_n N_n(T\rho) \quad (8)$

41

Cind $v(niu)$ este intreg sau zero, $v = n$, functiile $J_n(x)$ si $J_{-n}(x)$ nu sunt linear independente, relatiile (5). In acest caz, solutiile independente devin functiile Bessel, $J_n(x)$ – ecuatie (6), si Neumann, $N_n(x)$ – ecuatie (7), de ordin intreg.
In acest caz, solutia ecuatiei Bessel, $R(\rho)$, va fi relatia (8)

Solutii complexe ale ecuatiei de tip Bessel

$$x \frac{d}{dx} \left[x \frac{dR(x)}{dx} \right] + (x^2 - \nu^2) R(x) = 0$$

Functii Hankel de tip 1 si 2

$$\begin{cases} H_{\nu}^{(1)}(x) = J_{\nu}(x) + jN_{\nu}(x) \\ H_{\nu}^{(2)}(x) = J_{\nu}(x) - jN_{\nu}(x) \end{cases} \quad (9)$$

$$R(\rho) = A_{\nu} H_{\nu}^{(1)}(T\rho) + B_{\nu} H_{\nu}^{(2)}(T\rho) \quad (10)$$

42

Combinatiile liniare din relatia (9) sunt tot solutii ale ecuatiei Bessel. Functiile H sunt functiile Hankel de spata 1 si , respectiv, 2. Prin urmare , solutia ecuatiei Bessel, R(ρ), va fi relatia (10).

Solutii pentru R si T^2>0

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + (T^2 \rho^2 - \nu^2) R = 0$$

$$R(\rho) = a_\nu J_\nu(T\rho) + b_\nu J_{-\nu}(T\rho)$$

sau

$$R(\rho) = A_\nu J_\nu(T\rho) + B_\nu N_\nu(T\rho)$$

sau

$$R(\rho) = A_n J_n(T\rho) + B_n N_n(T\rho)$$

sau

$$R(\rho) = A_\nu H_\nu^{(1)}(T\rho) + B_\nu H_\nu^{(2)}(T\rho)$$

43

In fapt, oricare doua din functiile J, N, H1 sau H2, sunt liniar independente, deci o combinatie liniara a lor este un set complet de solutii a ecuatiei Bessel.

Solutii pentru R si T^2<0

$$T = j\tau$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - (\tau^2 \rho^2 + \nu^2) R = 0 \quad (11)$$

$$x \frac{d}{dx} \left[x \frac{dR(x)}{dx} \right] - (x^2 + \nu^2) R(x) = 0 \quad (12)$$

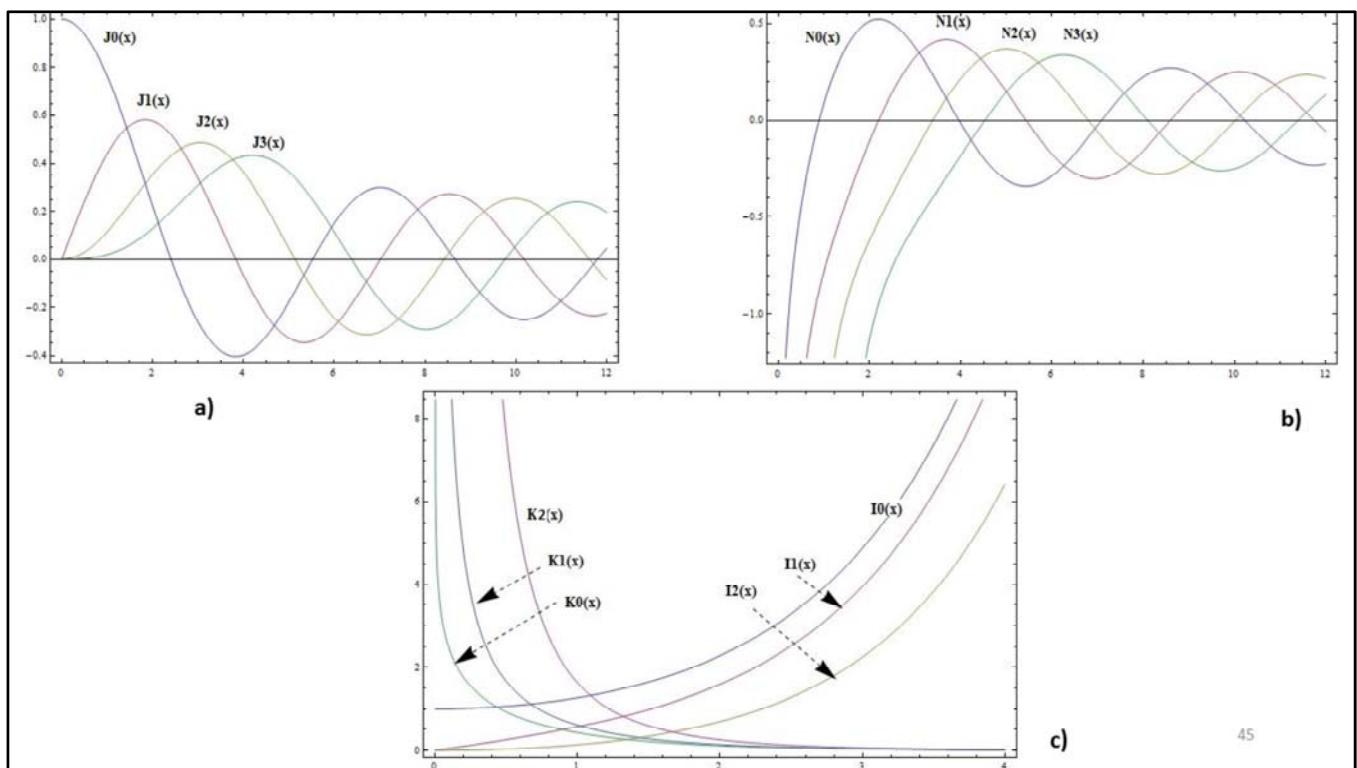
Functii Bessel modificate de tipul 1 si 2

$$\begin{cases} I_\nu(x) = j^{-\nu} J_\nu(x) \\ K_\nu(x) = j^{-\nu+1} \frac{\pi}{2} H_\nu^{(1)}(jx) = j^{-\nu+1} \frac{\pi}{2} [J_\nu(jx) + jN_\nu(jx)] \end{cases} \quad (13)$$

$$R(\rho) = A_\nu I_\nu(\tau\rho) + B_\nu K_\nu(\tau\rho) \quad (14)$$

44

Daca $T^2 < 0$, inlocuim $T = j\tau$ si x cu jx . Ecuatia Bessel devine ecuatie Bessel modificata, (11) respectiv (12). Solutia ecuatiei (12) sunt functiile Bessel modificate (13). Astfel, Solutia ecuatiei (11) va fi relatia (14).



Functiile Bessel, functiile Neumann, functiile Hankel si functiile Bessel modificate sunt *functii armonice in coordonate cilindrice*, asa cum sin si cos sunt functii armonice in coordonate rectangulare.

Functiile Bessel , a), si Neumann, b), sunt functii quasi-periodice cu zerouri multiple, similare functiilor sin si cos, care reprezinta unde stationare.

Functiile Bessel modificate, c) , sunt functii monotone, crescatoare sau descrescatoare, similare functiilor hiperbolice si exponentiale cu argument real. Ele descriu cimpurile evanescente.

Functiile Hankel sunt similare cu functiile exponentiale cu argument imaginari din coordonate rectangulare, care descriu undele progresive.

Concluzii -1

$$U, V(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$$

$$Z(z) = Fe^{j\beta z} + Ge^{-j\beta z} = f \sin \beta z + g \cos \beta z = \sin(\beta z + \psi_z) \quad (1)$$

$$Z(z) = Fe^{K_z z} + Ge^{-K_z z} = f \sinh K_z z + g \cosh K_z z \quad (2)$$

$$\Phi(\phi) = C_\nu \cos \nu \phi + D_\nu \sin \nu \phi = c_\nu e^{j\nu \phi} + d_\nu e^{-j\nu \phi} \quad (3)$$

$R(\rho)$ = combinatie liniara de doua functii Bessel (4)

46

Functia $Z(z)$ este data de relatia (1) pentru starea de propagare, $T^2 > 0$, sau de relatia (2) pentru cazul undelor evanescente in starea de taiere, situatie in care s-a folosit relatia $\beta=jKz$.

Functia $\Phi(\phi)$ este data de relatia (3).

Concluzii -2

$$\left\{ \begin{array}{l} E_\rho = \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial z} - j\omega \mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_\phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi \partial z} + j\omega \mu \frac{\partial V}{\partial \rho} \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = (k^2 - \beta^2) U = T^2 U = -\tau^2 U \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_\rho = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial z} + j\omega \varepsilon \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_\phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial z} - j\omega \varepsilon \frac{\partial U}{\partial \rho} \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_z = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + k^2 V = (k^2 - \beta^2) V = T^2 V = -\tau^2 V \end{array} \right. \quad (10)$$

$$u_1 = \rho, u_2 = \phi, u_3 = z$$

$$h_1 = h_3 = 1, h_2 = \rho$$

47

In coordinate cilindrice circulare, componentelete cimpului sunt exprimate in functie de U si V prin relatiile(4)-(10).

Concluzii -3

$$\left\{ \begin{array}{l} E_\rho = -j\beta \frac{\partial U}{\partial \rho} - j\omega \mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \end{array} \right. \quad (11)$$

$$u_1 = \rho, u_2 = \phi, u_3 = z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_\phi = -\frac{j\beta}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} + j\omega \mu \frac{\partial V}{\partial \rho} \end{array} \right. \quad (12)$$

$$h_1 = h_3 = 1, h_2 = \rho$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = (k^2 - \beta^2)U = T^2 U = -\tau^2 U \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_\rho = -j\beta \frac{\partial V}{\partial \rho} + j\omega \epsilon \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} \end{array} \right. \quad (14)$$

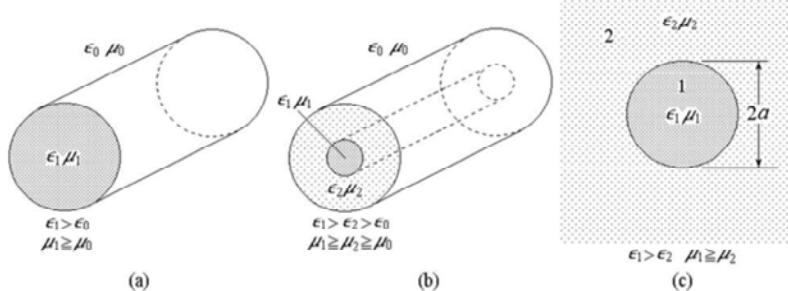
$$\left\{ \begin{array}{l} H_\phi = -\frac{j\beta}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} - j\omega \epsilon \frac{\partial U}{\partial \rho} \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_z = (k^2 - \beta^2)V = T^2 V = -\tau^2 V \end{array} \right. \quad (16)$$

48

Daca suntem interesati in propagarea undei in lungul axei +z, atunci componentele cimpului sunt exprimate prin relatiile (11)-(16)

Fibra optica



$$U(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$$

$$R(\rho) = \begin{cases} AJ_n(T\rho) + A'N_n(T\rho), & \rho \leq a \\ CK_n(\tau\rho) + C'I_n(\tau\rho), & \rho > a \end{cases} \quad (1)$$

49

Ghidurile dielectrice circulare pentru unde milimetri pot fi facute dintr-un fir dielectric cu sectiune circular, ca in Fig.a). Cele mai promitatoare ghiduri optice sunt fibrele optice cu salt de indice si indice gradat. Teoria electromagnetică a fibrelor cu indice gradat se referă la propagarea undelor în medii flexie totală este satisfăcută și neuniforme și nu o detaliem aici. Fibra optică cu salt de indice constă dintr-un miez de material dielectric avind indicele de refracție n_1 și o teacă dintr-un material dielectric diferit a cărui indice de refracție n_2 este cu puțin mai mic decât n_1 , ca în Fig.b. Cu această configurație, pentru starea de undă propagativă, condiția de reflexia totală este satisfăcută și cimpurile sunt confinată în miez.

Pentru moduri ghidate, cimpurile în miez sunt unde stationare radială cu dependentă de ρ de tip funcție Bassel, relația (1), în timp ce în teacă cimpurile sunt evanescente radială, cu dependentă de ρ de tip funcții Bassel modificate, relația (2).

Grosimea tecii este suficient de mare astfel încât cimpurile să fie suficient de mici în afara tecii.

Presupunem că teaca se extinde la infinit. Astfel, modelul fizico-matematic al fibrei optice cu salt de indice este cel al ghidului dielectric circular, Fig.c

Ghid dielectric cilindric model pentru fibra optica

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = AJ_n(T\rho)e^{jn\phi}e^{-j\beta z} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = BJ_n(T\rho)e^{jn\phi}e^{-j\beta z} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\rho 1} = \left[-j\beta TAJ_n'(T\rho) + \frac{\omega\mu_1 n}{\rho} BJ_n(T\rho) \right] e^{jn\phi}e^{-j\beta z} \end{array} \right. \quad (3)$$

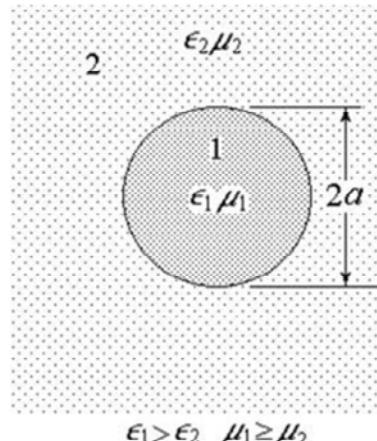
$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\phi 1} = \left[j\omega\mu_1 TBJ_n'(T\rho) + \frac{\beta n}{\rho} AJ_n(T\rho) \right] e^{jn\phi}e^{-j\beta z} \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{z1} = T^2 U_1 = AT^2 J_n(T\rho)e^{jn\phi}e^{-j\beta z} \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{\rho 1} = \left[-j\beta TBJ_n'(T\rho) - \frac{\omega\epsilon_1 n}{\rho} AJ_n(T\rho) \right] e^{jn\phi}e^{-j\beta z} \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{\phi 1} = \left[-j\omega\epsilon_1 TAJ_n'(T\rho) + \frac{\beta n}{\rho} BJ_n(T\rho) \right] e^{jn\phi}e^{-j\beta z} \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{z1} = T^2 V_1 = BT^2 J_n(T\rho)e^{jn\phi}e^{-j\beta z} \end{array} \right. \quad (8)$$



50

Miezul este denumit regiunea 1 cu raza a; teaca este denumita regiunea 2 si se extinde la infinit in directie radiala. Parametrii constitutive ai miezului sunt ε₁, μ₁ si cei ai tecii sunt ε₂, μ₂. In fibrele cu salt de indice, modurile proprii in cele mai multe cazuri sunt moduri hibride cu U si V diferite de zero.

In miez, $0 < \rho < a$, dependenta de ρ este unic determinata de functiile Bessel de tip 1 si ordin intreg n, $J_n(T\rho)$, coeficientul functiei Noemann trebuind sa fie zero deoarece functia Noemann are osingularitate pentru $\rho=0$, iar axa fibrei, $\rho = 0$, este inclusa in miez. Dependenta unghiulara a functiei de unda trebuie sa fie de tipul $\exp(jn\phi)$, unde n este un intreg pozitiv sau negativ deoarece intrega circumferinta este inclusa in regiune. Dependenta longitudinala de z este presupusa $\exp(-j\beta z)$, pentru unde care se propaga in directia +z. Astfel functiile U_1 si V_1 sunt (1) si (2). Componentele cimpurilor vor fi (3) – (8).

Ghid dielectric cilindric model pentru fibra optica - 2

$$\left\{ \begin{array}{l} U_2 = CK_n(\tau\rho)e^{jn\phi}e^{-j\beta z} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_2 = DK_n(\tau\rho)e^{jn\phi}e^{-j\beta z} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$E_{\rho 2} = \left[-j\beta\tau CK'_n(\tau\rho) + \frac{\omega\mu_2 n}{\rho} DK_n(\tau\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \quad (3)$$

$$E_{\phi 2} = \left[j\omega\mu_2 \tau DK'_n(\tau\rho) + \frac{\beta n}{\rho} CK_n(\tau\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \quad (4)$$

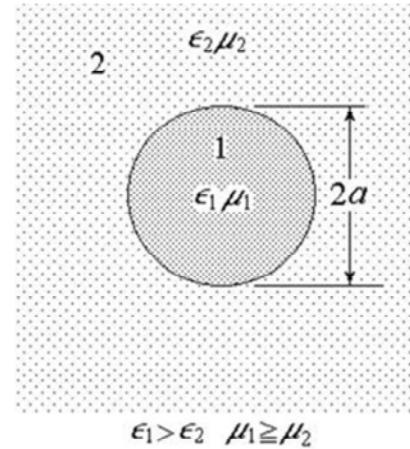
$$E_{z 2} = T^2 U_2 = -\tau^2 CK_n(\tau\rho)e^{jn\phi}e^{-j\beta z} \quad (5)$$

$$H_{\rho 2} = \left[-j\beta\tau DK'_n(\tau\rho) - \frac{\omega\epsilon_2 n}{\rho} CK_n(\tau\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \quad (6)$$

$$H_{\phi 2} = \left[-j\omega\epsilon_2 \tau CK'_n(\tau\rho) + \frac{\beta n}{\rho} DK_n(\tau\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \quad (7)$$

$$H_{z 2} = T^2 V_2 = -\tau^2 DK_n(\tau\rho)e^{jn\phi}e^{-j\beta z} \quad (8)$$

Teaca-2



51

In teaca (regiunea 2), $a < \rho < \infty$, dependenta functiei de unda de ρ este unic determinata de functia Bessel modificata de tip 2, $Kn(\tau\rho)$, iar coeficientii functiei $In(\tau\rho)$ trebuie sa fie zero deoarece $\rho \rightarrow \infty$ este inclus in regiune. Dependenta unghiulara si dependenta longitudinala a functiilor de unda trebuie sa fie aceleasi ca in miez pentru a satisface conditiile pe frontier. Astfel, functiile de unda U_2 si V_2 sunt date de relatiile (1) si (2).

Componentele cimpurilor sunt date in relatiile (3) – (8).

Ghid dielectric cilindric model pentru fibra optica - 3

$$\begin{cases} \beta^2 + T^2 = k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_1 = k_0^2 n_1^2 & (1) \\ \beta^2 - \tau^2 = k_2^2 = \omega^2 \epsilon_2 \mu_2 = k_0^2 n_2^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{z1}(a) = E_{z2}(a) & (3) \\ H_{z1}(a) = H_{z2}(a) & (4) \end{cases}$$

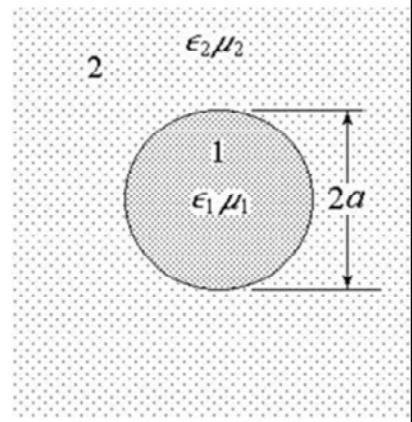
$$\begin{cases} E_{\phi 1}(a) = E_{\phi 2}(a) & (5) \\ H_{\phi 1}(a) = H_{\phi 2}(a) & (6) \end{cases}$$

$$T^2 J_n(Ta) A + \tau^2 K_n(\tau a) C = 0 \quad (7)$$

$$T^2 J_n(Ta) B + \tau^2 K_n(\tau a) D = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\beta n}{a} J_n(Ta) A + j\omega \mu_1 T J'_n(Ta) B - \frac{\beta n}{a} K_n(\tau a) C - j\omega \mu_2 \tau K'_n(\tau a) D = 0 \quad (9)$$

$$-j\omega \epsilon_1 T J_n(Ta) A + \frac{\beta n}{a} J'_n(Ta) B + j\omega \epsilon_2 \tau K'_n(\tau a) C - \frac{\beta n}{a} K_n(\tau a) D = 0 \quad (10)$$



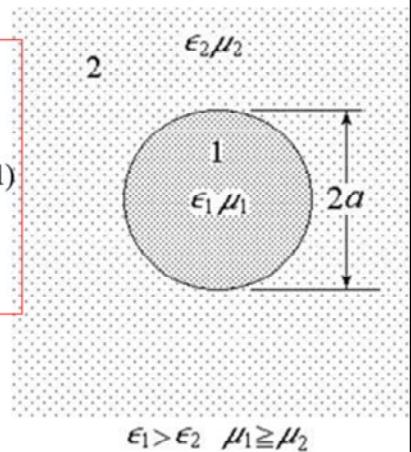
52

Pentru a satisface ecuațiile Helmholtz, relațiile dintre β , coeficientul de fază longitudinal, T , coeficientul de fază transversal în miez (regiunea 1), τ , coeficientul de descreștere transversal în teaca (regiunea 2), și k_1 și k_2 , coeficientii de fază în mediu nemarginat pentru materialele din regiunea 1 și 2, trebuie să fie (1) și (2).

Condițiile pe frontieră la frontieră dintre regiunile 1 și 2 sunt date de relațiile (3) – (6). Aceste condiții pe frontieră conduc la ecuațiile (7) – (10). Acest sistem omogen de ecuații algebrice, cu necunoscutele A, B, C și D , va avea soluție nebanală cind determinantul sistemului va fi nul, adică:

Ghid dielectric cilindric model pentru fibra optica - 4

$$\begin{vmatrix} T^2 J_n(Ta) & 0 & \tau^2 K_n(\tau a) & 0 \\ 0 & T^2 J_n(Ta) & 0 & \tau^2 K_n(\tau a) \\ \frac{\beta n}{a} J_n(Ta) & j\omega\mu_1 T J_n'(Ta) & -\frac{\beta n}{a} K_n(\tau a) & -j\omega\mu_2 \tau K_n'(\tau a) \\ -j\omega\epsilon_1 T J_n'(Ta) & \frac{\beta n}{\rho} J_n(T\rho a) & j\omega\epsilon_2 \tau K_n'(\tau a) & \frac{\beta n}{\rho} K_n(\tau a) \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$



$$\left[\frac{\epsilon_1 J_n'(Ta)}{Ta J_n(Ta)} + \frac{\epsilon_2 K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] \left[\frac{\mu_1 J_n'(Ta)}{Ta J_n(Ta)} + \frac{\mu_2 K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] - \frac{n^2 \beta^2}{\omega^2} \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{1}{(\tau a)^2} \right] = 0 \quad (12)$$

53

Ecuatia (11) este ecuatia de valori proprii generala a ghidului de unda dielectric circular sau a fibrei cu salt de indice, care poate fi rescrisa sub forma ecuatiei transcedentale (12).

Ghid dielectric cilindric model pentru fibra optica - 5

$$\beta^2 \left[(Ta)^{-2} + (\tau a)^{-2} \right] = \frac{k_1^2}{(Ta)^2} + \frac{k_2^2}{(\tau a)^2} = \omega^2 \left(\frac{\mu_1 \epsilon_1}{(Ta)^2} + \frac{\mu_2 \epsilon_2}{(\tau a)^2} \right) \quad (13)$$

$$\left[\frac{\epsilon_1 J_n'(Ta)}{Ta J_n(Ta)} + \frac{\epsilon_2 K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] \left[\frac{\mu_1 J_n'(Ta)}{Ta J_n(Ta)} + \frac{\mu_2 K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] - n^2 \left[\frac{\epsilon_1 \mu_1}{(Ta)^2} + \frac{\epsilon_2 \mu_2}{(\tau a)^2} \right] \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{1}{(\tau a)^2} \right] = 0 \quad (14)$$

$$T^2 + \tau^2 = k_1^2 - k_2^2 = \omega^2 a^2 (\mu_1 \epsilon_1 - \mu_2 \epsilon_2) \quad (15) \quad \text{sau} \quad (Ta)^2 + (\tau a)^2 = V^2 \quad (16)$$

$$V = \omega a \sqrt{(\mu_1 \epsilon_1 - \mu_2 \epsilon_2)} \quad (17)$$

$$b = \frac{\beta/k_0 - n_2}{n_1 - n_2} = \frac{\bar{n} - n_2}{n_1 - n_2} \quad (17')$$

↓
T, τ

V = frecventa normalizata pentru ghidul circular dielectric

B = constanta de propagare normalizata pentru ghidul circular dielectric

54

Din ecautia (1)-(2) (slide 52) rezulta ecuatia (13). Din (12) si (13), eliminind pe β, obtinem forma (14) a ecuatiei de valori proprii.

Relatia dintre T si τ este (15) sau (16). In relatia (16), V este frecventa normalizata pentru ghidul circular dielectric, data de relatia (17). Tot in relatia (17) este definite si constanta de propagare normalizata b.

Dir ecautia de valori proprii (14) si ecautia (16) se deduc T si τ.

Ghid dielectric cilindric model pentru fibra optica - 6

$$\chi = \frac{\frac{\varepsilon_{r1} J_n'(Ta)}{TaJ_n(Ta)} + \frac{\varepsilon_{r2} K_n'(\tau a)}{\tau aK_n(\tau a)}}{n \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{1}{(\tau a)^2} \right]} = \frac{n \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{1}{(\tau a)^2} \right]}{\frac{\varepsilon_{r1} \mu_{r1}}{(Ta)^2} + \frac{\varepsilon_{r2} \mu_{r2}}{(\tau a)^2}} \quad (17)$$

$$\chi = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\beta} \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1} J_n'(Ta)}{TaJ_n(Ta)} + \frac{\varepsilon_{r2} K_n'(\tau a)}{\tau aK_n(\tau a)}}}{\sqrt{\frac{\mu_{r1} J_n'(Ta)}{TaJ_n(Ta)} + \frac{\mu_{r2} K_n'(\tau a)}{\tau aK_n(\tau a)}}} \quad (18)$$

$$\frac{C}{A} = \frac{D}{B} = -\frac{T^2 J_n(Ta)}{\tau^2 K_n(\tau a)} \quad (19)$$

$$\frac{H_z}{E_z} = \frac{B}{A} = \frac{D}{C} = \frac{j \beta \chi}{\omega \mu_0} = j \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1} J_n'(Ta)}{TaJ_n(Ta)} + \frac{\varepsilon_{r2} K_n'(\tau a)}{\tau aK_n(\tau a)}}}{\sqrt{\frac{\mu_{r1} J_n'(Ta)}{TaJ_n(Ta)} + \frac{\mu_{r2} K_n'(\tau a)}{\tau aK_n(\tau a)}}} \quad (20)$$

$$\begin{cases} Z_n(x) = \frac{x}{2n} [Z_{n-1}(x) + Z_{n+1}(x)] \\ Z_n'(x) = \frac{1}{2} [Z_{n-1}(x) - Z_{n+1}(x)] \end{cases}; Z_n(x) = J_n(x), N_n(x), H_n^{(1)}(x), H_n^{(2)}(x)$$

55

Rescriind ecuatia de valori proprii (14) si introducind parametrul χ , relatia (17), si substituind dedus din relatia (12) in expresia lui χ , obtinem relatia (18).

Din conditiile simutane pe frontier (7) – (10), obtinem relatiile (19)-(20).

Folosind aceste relatii in expresiile componentelor cimpurilor in miez si teaca, ramine doar constanta A de determinat.

Expresiile acestor componente, in care am folosit identitatatile functiilor Bessel, sunt:

Ghid dielectric cilindric model pentru fibra optica - Cimpurile in miez

$$E_{\rho 1} = j\beta T A \left[\frac{1+\mu_{r1}\chi}{2} J_{n+1}(T\rho) - \frac{1-\mu_{r1}\chi}{2} J_{n-1}(T\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \quad (21)$$

$$E_{\phi 1} = \beta T A \left[\frac{1+\mu_{r1}\chi}{2} J_{n+1}(T\rho) + \frac{1-\mu_{r1}\chi}{2} J_{n-1}(T\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \quad (22)$$

$$E_{z1} = T^2 A J_n(T\rho) e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \quad (23)$$

$$\left\{ H_{\rho 1} = -\frac{\beta^2 T A}{\omega \mu_0} \left[\frac{\chi + \frac{k^2}{\beta^2} \varepsilon_{r1}}{2} J_{n+1}(T\rho) - \frac{\chi - \frac{k^2}{\beta^2} \varepsilon_{r1}}{2} J_{n-1}(T\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \quad (24) \right.$$

$$\left. H_{\phi 1} = j \frac{\beta^2 T A}{\omega \mu_0} \left[\frac{\chi + \frac{k^2}{\beta^2} \varepsilon_{r1}}{2} J_{n+1}(T\rho) + \frac{\chi - \frac{k^2}{\beta^2} \varepsilon_{r1}}{2} J_{n-1}(T\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \quad (25) \right\}$$

$$H_{z1} = j \frac{T^2 \beta \chi}{\omega \mu_0} A J_n(T\rho) e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \quad (26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\beta} \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1} J'_n(Ta)}{Ta J_n(Ta)} + \frac{\varepsilon_{r2} K'_n(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)}} \\ k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \end{array} \right.$$

Ghid dielectric cilindric model pentru fibra optica Cimpurile in teaca

$$E_{\rho 2} = j\beta\tau C \left[\frac{1+\mu_{r2}\chi}{2} K_{n+1}(\tau\rho) + \frac{1-\mu_{r2}\chi}{2} K_{n-1}(\tau\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \quad (27)$$

$$E_{\phi 2} = \beta\tau C \left[\frac{1+\mu_{r2}\chi}{2} K_{n+1}(T\rho) - \frac{1-\mu_{r2}\chi}{2} K_{n-1}(\tau\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \quad (28)$$

$$E_{z2} = \tau^2 C K_n(\tau\rho) e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \quad (29)$$

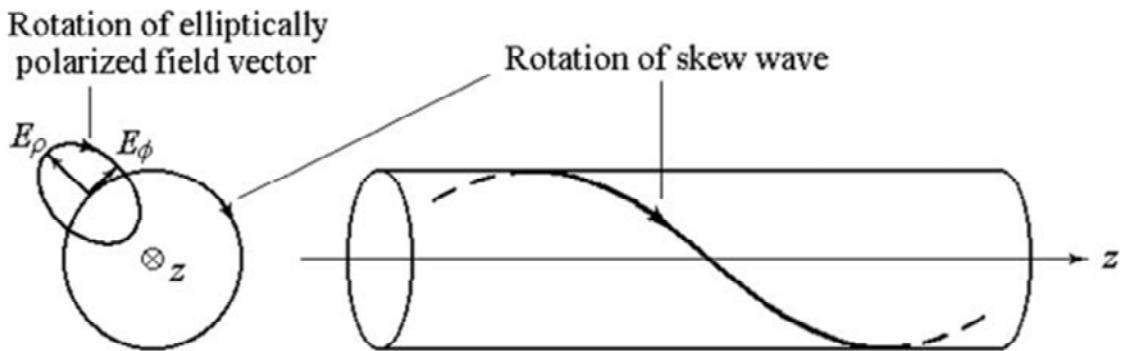
$$\left\{ H_{\rho 2} = -\frac{\beta^2 \tau C}{\omega \mu_0} \left[\frac{\chi + \frac{k^2}{\beta^2} \varepsilon_{r2}}{2} K_{n+1}(\tau\rho) + \frac{\chi - \frac{k^2}{\beta^2} \varepsilon_{r2}}{2} K_{n-1}(\tau\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \quad (30) \right.$$

$$\left. H_{\phi 2} = j \frac{\beta^2 \tau C}{\omega \mu_0} \left[\frac{\chi + \frac{k^2}{\beta^2} \varepsilon_{r2}}{2} K_{n+1}(\tau\rho) - \frac{\chi - \frac{k^2}{\beta^2} \varepsilon_{r2}}{2} K_{n-1}(\tau\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \quad (31) \right.$$

$$H_{z2} = -j \frac{\tau^2 \beta \chi}{\omega \mu_0} C K_n(\tau\rho) e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \quad (32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\beta} \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1} J_n'(Ta)}{Ta J_n(Ta)} + \frac{\varepsilon_{r2} K_n'(Ta)}{\tau a K_n(Ta)}} \\ k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \end{array} \right.$$

Ghid dielectric cilindric model pentru fibra optica



58

Privind la relatiile dintre componente transversale E_ρ si E_ϕ , sau H_ρ si H_ϕ , gasim ca, cimpurile transversale sunt polarizate eliptic, constind din doua componente polarizate circular in directii opuse.

In expresiile anterioare, n este intreg sau zero. Modurile pentru $n = 0$ reprezinta moduri axiale simetrice (moduri meridionale).

Modurile cu n diferit de zero reprezinta moduri axiale asimetrice (moduri oblice).

Modurile oblice cu n pozitiv sau negativ reprezinta moduri oblice care se rotesc in sens invers acelor de ceasornic (regula minii stungi) sau in sensul acelor de ceasornic (regula miinii drepte).

De notat ca, directia de rotire a modurilor oblice si directia de rotire a vectorilor cimpului polarizat sunt notiuni complet diferite.

Din ecuatiiile pentru valorile proprii (12) sau (14) vedem ca, conditiile de taiere si relatiile de dispersie sunt aceleasi pentru $+n$ si $-n$:

$$\tau(-n) = \tau(+n) \text{ si } \beta(-n) = \beta(+n).$$

Prin urmare, undele oblice rotitoare in sensul acelor si invers, ce corespund functiilor $\text{Exp}(-jn*\phi)\text{Exp}(-jz*\beta(-n))$ si $\text{Exp}(jn*\phi)\text{Exp}(-jz*\beta(n))$, pot fi compuse din doua unde stationare mutual ortogonale unghiular: $\sin(n*\phi)\text{Exp}(-jz*\beta(n))$ si $\cos(n*\phi)\text{Exp}(-jz*\beta(n))$, cu directie de polarizare stationara. Aceasta este o caracteristica a tuturor ghidurilor facute din materiale izotrope si cu frontiere isotropice.

Rezolvarea ecuatiei de valori proprii

Conditia de taiere

$$\begin{cases} \tau = 0 \\ T = T_c \end{cases} \quad (34)$$

$$(T_c)^2 = \omega_c^2 (\mu_1 \epsilon_1 - \mu_2 \epsilon_2) , \quad \omega_c = \frac{T_c}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1 - \mu_2 \epsilon_2}} \quad (35)$$

59

Conditia de taiere a ghidului dielectric circular uniform este $\tau = 0$ si $T = T_c$. Aplicind aceste conditii in relatia (14), obtinem T_c . Apoi, frecventa de taiere, ω_c , se poate calcula cu relatiile (35).

Daca frecventa de functionare ω este mai mare decit frecventa de taiere, ω_c , atunci $T^2 < T_c^2$, $\tau^2 > 0$, deci τ este real. In acest caz, dependenta radiala a cimpurilor in teaca va fi de tipul functiilor Bessel modificate de tipul 2, deci cimpurile sunt functii descrescatoare in raport cu ρ in teaca si de tip progresiv in lungul lui z . Aceasta este modul ghidat.

Daca frecventa de functionare ω este mai mica decit frecventa de taiere ω_c , atunci $T^2 > T_c^2$, $\tau^2 < 0$, deci tau este imaginari. In acest caz, dependenta radiala a cimpurilor in teaca va fi de tipul functiilor Bessel modificate de tipul 2, cu argument imaginari, care se reduc la functii Hankel de tipul 2. ceea ce reprezinta unde progresive radiale. Aceasta este modul radiativ. In acest caz, miezul dielectric actioneaza ca o antena cilindrica care radiaza energie spre exterior.

Rezolvarea ecuatiei de valori proprii

$$\left[\frac{J_n'(Ta)}{TaJ_n(Ta)} \right]^2 + \left[\frac{\varepsilon_1\mu_2 + \varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_1} \frac{K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] \frac{J_n'(Ta)}{TaJ_n(Ta)} \\ + \frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1} \left[\frac{K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right]^2 - n^2 \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1(\tau a)^2} \right] \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{1}{(\tau a)^2} \right] = 0 \quad (36)$$

$$\frac{J_n'(Ta)}{TaJ_n(Ta)} = -P + \sqrt{R} \quad (37) \text{ Pentru moduri EH}$$

$$\frac{J_n'(Ta)}{TaJ_n(Ta)} = -P - \sqrt{R} \quad (38) \text{ Pentru moduri HE}$$

$$P = \frac{\varepsilon_1\mu_2 + \varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_1} \frac{K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)}$$

$$R = \left(\frac{\varepsilon_1\mu_2 - \varepsilon_2\mu_1}{2\varepsilon_1\mu_1} \right)^2 \left[\frac{K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right]^2 - n^2 \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1(\tau a)^2} \right] \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{1}{(\tau a)^2} \right]$$

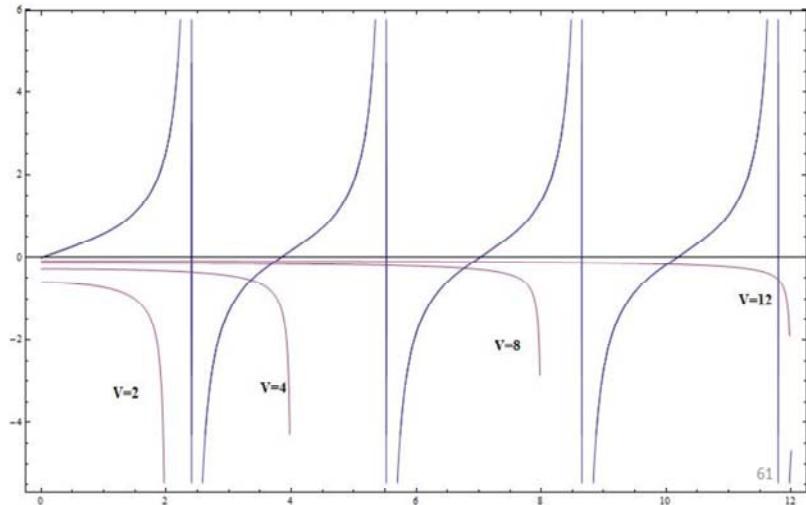
60

Ecuatia de valori proprii (14) poate fi pusa sub forma quadratica (36). Radacinile acestei ecuatii patratice sunt (37)-(38).

Rezolvarea ecuatiei de valori proprii 2

$$\tau a = \sqrt{(k_1 a)^2 - (k_2 a)^2 - (Ta)^2} = \sqrt{\omega^2 a (\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2) - (Ta)^2} = \sqrt{V^2 - (Ta)^2}$$

$$\frac{J_n'(Ta)}{Ta J_n(Ta)} = -P \pm \sqrt{R}$$



Ecuatiile de mai sus pot fi rezolvate grafic reprezentind ambii membri in functie de Ta , folosind expresia pentru τa data pe slide (asa cum se sugereaza pe figura). Modurile proprii in ghidurile dielectrice circulare sunt modurile TE0m, TM0m si modurile HEMnm.

Modurile HEMnm pot fi clasificate, la rindul lor, in moduri EHnm si Henm.

Modurile sunt TE0m sau EHnm daca alegem semnul plus in fata radicalului si TM0m sau Henm daca alegem semnul minus in fata radicalului.

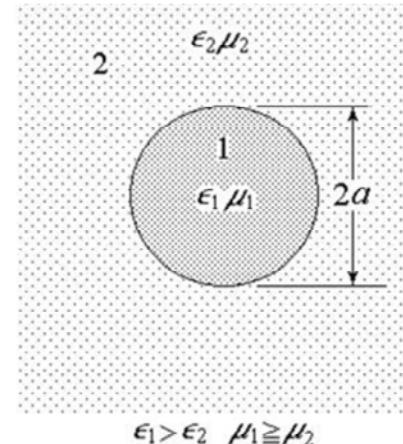
Modurile simetrice circulare, TE si TM

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \quad (37)$$

Moduri TE si TM

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \neq 0 \quad (38)$$

Moduri HEM



62

In ghidul dielectric cilindric uniform, moduri pure TE sau TM exista doar cind cimpurile in sectiunea transversal sint simetric circulare, adica este satisfacuta relatia (37). Acest lucru corespunde la moduri axial simetrice (sau raze meridionale), $n = 0$.

Cind cimpurile nu sunt uniforme in directia ϕ , relatia (38), modurile proprii trebuie sa fie hibride, asa numitele moduri HEM., care corespund la moduri axial asimetrice sau skew rays.

In acest curs ne vom ocupa doar de modurile axiale simetrice.

Modurile TE si TM

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \Leftrightarrow n = 0$$

$$\begin{cases} J_0'(x) = -J_1(x) \\ K_0'(x) = -K_1(x) \end{cases}$$

$$\left[\frac{\varepsilon_1 J_1(Ta)}{Ta J_0(Ta)} + \frac{\varepsilon_2 K_1(\tau a)}{\tau a K_0(\tau a)} \right] \left[\frac{\mu_1 J_1(Ta)}{Ta J_0(Ta)} + \frac{\mu_2 K_1(\tau a)}{\tau a K_0(\tau a)} \right] = 0 \quad (39)$$

$$\begin{cases} \frac{J_1(Ta)}{J_0(Ta)} = -\frac{\varepsilon_2 Ta K_1(\tau a)}{\varepsilon_1 \tau a K_0(\tau a)} \end{cases} \quad (40)$$

Pentru moduri TM

$$\begin{cases} \frac{J_1(Ta)}{J_0(Ta)} = -\frac{\mu_2 Ta K_1(\tau a)}{\mu_1 \tau a K_0(\tau a)} \end{cases} \quad (41)$$

Pentru moduri TE

63

Modurile TE si TM există doar cind cimpurile în secțiunea transversală sunt circular simetrice.

Modurile TE și TM - 2

$$\chi = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\beta} \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_{r1} J_1(Ta)}{Ta J_0(Ta)} + \frac{\epsilon_{r2} K_1(\tau a)}{\tau a K_0(\tau a)}}}{\sqrt{\frac{\mu_{r1} J_1(Ta)}{Ta J_0(Ta)} + \frac{\mu_{r2} K_1(\tau a)}{\tau a K_0(\tau a)}}} \quad (42)$$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$$

$$\frac{H_z}{E_z} = \frac{j\beta\chi}{\omega\mu_0} \quad (43)$$

Pentru moduri TM $\chi \rightarrow 0 \Rightarrow H_z = 0$

Pentru moduri TE $\chi \rightarrow \infty \Rightarrow E_z = 0$

64

Pentru modurile circular simetrice, ecuațiile (18) și (20) devin (42) și (43).

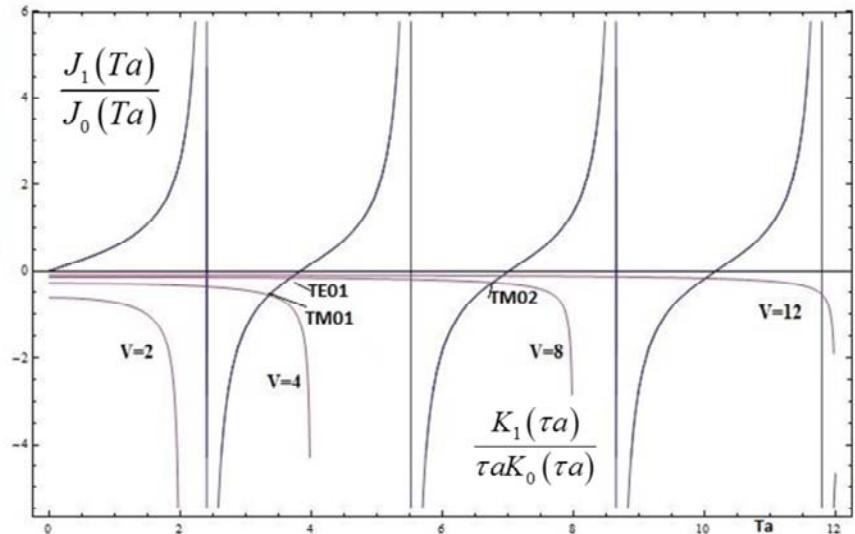
Modurile TE si TM - 3

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{J_1(Ta)}{J_0(Ta)} = -\frac{\varepsilon_2 Ta K_1(\tau a)}{\varepsilon_1 \tau a K_0(\tau a)} \end{array} \right. \quad (40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{J_1(Ta)}{J_0(Ta)} = -\frac{\mu_2 Ta K_1(\tau a)}{\mu_1 \tau a K_0(\tau a)} \end{array} \right. \quad (41)$$

$$0 \leq Ta \leq V$$

$$V = \omega a \sqrt{(\mu_1 \varepsilon_1 - \mu_2 \varepsilon_2)}$$



65

Consideram acum rezolvarea grafica a ecuatiilor (40)-(41).

In partea stanga a ecuatiilor avem $J_1(Ta)/J_0(Ta)$, care porneste de la 0 la $Ta=0$ si creste monoton spre infinit. Pentru primul zero al lui $J_0(Ta)$ care are loc pentru $Ta = 2.405$. Peste aceasta valoare, $J_1(Ta)/J_0(Ta)$ variaza de la minus infinit la plus infinit intre zorourile lui $J_0(Ta)$. Pentru valori mari ale lui Ta , $J_1(Ta)/J_0(Ta)$ variaza asimptotic ca si $-\tan(Ta - \pi/4)$.

Pentru membrul drept, modurile ghidate cer ca τ sa fie real pentru a avea o descrestere exponentiala a cimpurilor in teaca. Corespunzator, $(\tau^* a)^2$ nu este niciodata negativ si, corespunzator relatiilor (15)-(16), Ta trebuie sa satisfaca $0 < Ta < V$, unde V este frecventa normalizata pentru ghidurile cilindrice circulare. Membrul drept a relatiei (40) sau (41) este tot timpul negativ si variaza monoton descrescator cu Ta .

Condițiile de taiere pentru modurile TE și TM

$$\tau = 0, n = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} K_0(x) = \ln\left(\frac{2}{\gamma x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} K_1(x) = \frac{1}{x}, \quad \gamma = 1.781 \quad \lim_{\tau a \rightarrow 0} \frac{\tau a K_0(\tau a)}{K_1(\tau a)} = \lim_{\tau a \rightarrow 0} \left[(\tau a)^2 \ln \frac{2}{\gamma \tau a} \right] = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon_2 T a J_0(Ta)}{\varepsilon_1 J_1(Ta)} = 0 & (44) \\ \frac{\mu_2 T a J_0(Ta)}{\mu_1 J_1(Ta)} = 0 & (45) \end{cases}$$

$$J_0(Ta) = 0, T_c = \frac{x_{0m}}{a} \quad (46)$$

$$x_{01} = 2.405$$

$$x_{02} = 5.520$$

$$x_{03} = 8.654$$

$$x_{0m} \approx \left(m - \frac{1}{4}\right)\pi, m \geq 4$$

$$\omega_c = \frac{x_{0m}}{a \sqrt{(\mu_1 \varepsilon_1 - \mu_2 \varepsilon_2)}} \quad (47)$$

66

Condițiile de taiere pentru un ghid dielectric sunt $\tau = 0$ și $n = 0$. Astfel condițiile de taiere ale modurilor circular simetrice sunt (44)-(45). Radacinile acestor două ecuații sunt aceleasi , (46), unde x_{0m} sunt radacinile ecuației $J_0(x) = 0$.

Frecvența de taiere a modului TM0m sau TE0m este data de relația (47).

Condițiile de taiere pentru modurile TM0m și TE0m sunt aceleasi, doar ecuația de valori proprii, adica caracteristicile de dispersie sunt diferite.

Modul TM cel mai mic este TM01 și cel mai mic mod TE este TE01, corespunzătoare lui x_{01} . Acestea nu sunt modurile cele mai mici.

Ecuatiile cimpurilor in miez

Ghidul dielectric circular nemagnetic

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$$

$$\left[\frac{\varepsilon_1 J_n'(Ta)}{TaJ_n(Ta)} + \frac{\varepsilon_2 K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] \left[\frac{J_n'(Ta)}{TaJ_n(Ta)} + \frac{K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] - n^2 \left[\frac{\varepsilon_1}{(Ta)^2} + \frac{\varepsilon_2}{(\tau a)^2} \right] \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{1}{(\tau a)^2} \right] = 0 \quad (48)$$

$$\left[\frac{\varepsilon_1 J_{n+1}(Ta)}{TaJ_n(Ta)} + \frac{\varepsilon_2 K_{n+1}(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] \left[\frac{J_{n-1}(Ta)}{TaJ_n(Ta)} - \frac{K_{n-1}(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] + \left[\frac{\varepsilon_1 J_{n-1}(Ta)}{TaJ_n(Ta)} - \frac{\varepsilon_2 K_{n-1}(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] \left[\frac{J_{n+1}(Ta)}{TaJ_n(Ta)} + \frac{K_{n+1}(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] = 0 \quad (49)$$

67

In fibrele optice, miezul si teaca sunt facute din material dielectrice nemagnetice. Ecuatia de valori proprii este (48), sau folosind formulele de recurrenta si cele diferențiale din teoria functiilor Bessel obtinem, dupa un calcul destul de laborios, ecuatia (49).

Ghidul dielectric circular nemagnetic - 2

$$\frac{J_{n+1}(Ta)}{J_n(Ta)} = Ta \left[P + \frac{n}{(Ta)^2} - \sqrt{R} \right] \quad (50) \quad \text{Pentru moduri EH} \quad \bar{\epsilon} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}$$

$$\frac{J_{n-1}(Ta)}{J_n(Ta)} = Ta \left[-P + \frac{n}{(Ta)^2} - \sqrt{R} \right] \quad (51) \quad \text{Pentru moduri HE} \quad \Delta\epsilon = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2}$$

$$P = \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_1} \frac{K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} = \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_1} \left[\frac{n}{(\tau a)^2} - \frac{K_{n+1}(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] = \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_1} \left[-\frac{n}{(\tau a)^2} - \frac{K_{n-1}(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right]$$

$$\begin{aligned} R &= \left(\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_1} \right)^2 \left[\frac{K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right]^2 + n^2 \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 (\tau a)^2} \right] \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{1}{(\tau a)^2} \right] \\ &= \left\{ \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_1} \left[\frac{n}{(\tau a)^2} - \frac{K_{n+1}(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] \right\}^2 + n^2 \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 (\tau a)^2} \right] \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{1}{(\tau a)^2} \right] \\ &= \left\{ \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_1} \left[-\frac{n}{(\tau a)^2} - \frac{K_{n-1}(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] \right\}^2 + n^2 \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 (\tau a)^2} \right] \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{1}{(\tau a)^2} \right] \end{aligned}$$

68

Ecuatiile (37)-(38) devin (50)-(51). Pentru $n = 0$, ecuatiile (50) si (51) se reduc la (44)-(45) cu $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$.

Ghidul dielectric circular nemagnetic

$$n = 1$$

$$\frac{J_2(Ta)}{J_1(Ta)} = Ta \left[P + \frac{1}{(Ta)^2} - \sqrt{R} \right] \quad (52) \quad \text{Pentru moduri EH}$$

$$\frac{J_0(Ta)}{J_1(Ta)} = Ta \left[-P + \frac{1}{(Ta)^2} - \sqrt{R} \right] \quad (53) \quad \text{Pentru moduri HE}$$

$$P = \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_1} \left[\frac{1}{(\tau a)^2} - \frac{K_2(\tau a)}{\tau a K_1(\tau a)} \right] \quad R = \left\{ \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_1} \left[\frac{1}{(\tau a)^2} - \frac{K_2(\tau a)}{\tau a K_1(\tau a)} \right] \right\}^2 + \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 (\tau a)^2} \right] \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{1}{(\tau a)^2} \right]$$

$$J_1(Ta) = 0, \begin{cases} Ta = 0 & x_{11} = 3.83171 \\ T_c a = x_{1m'} = V \Rightarrow \omega_c = \frac{x_{1p}}{a \mu_0 \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}} & (54) \quad x_{12} = 7.01559 \quad x_{1m} \approx \left(m + \frac{1}{4}\right)\pi, m \geq 4 \\ & x_{13} = 10.1735 \end{cases}$$

69

Pentru $n = 1$, liniile care reprezinta functiile in Ta in ambii membri ai relatiei (52) pentru EH1m sunt similare cu cele pentru modurile TE si TM, cu exceptia faptului ca asimptotele verticale sunt pozitionate pe zerourile functiei $J_1(Ta)$ in loc de $J_0(Ta)$. Asemanator pentru ecuatia (53).

Modul HE11 exista pentru orice valoare a lui V , adica acest mod are frecventa de taiere zero deci se poate propaga la orice frecventa..

Celelalte moduri, EH1m si HE1m, au frecventa de taiere data de relatia (54), cu $p = m$ pentru EH1m si $p = m-1$ pentru HE1m.

Deoarece $Ta = 0$ este prima radacina a ecuatiei, **modul HE11 este modul fundamental de propagare pe ghidul dielectric cilindric nemagnetic.**

Fibre monomod

$$J_0(T_c a) = J_0(V_c) = 0$$

$$V < 2.405$$

$$\omega a \sqrt{\mu_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} < 2.405 \quad \frac{2\pi}{\lambda} c a \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 (\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2})} < 2.405$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} a \sqrt{n_1^2 - n_2^2} < 2.405 \quad \boxed{\frac{2\pi}{\lambda} a n_1 \sqrt{2\Delta} < 2.405 \quad (55)} \quad \Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$$

70

Fibrele monomod sunt aceleia care suporta doar modul fundamental de propagare, HE11. Fibra este astfel proiectata incit toate modurile superioare sa fie taiate la lungimea de unda de utilizare a fibrei. Parametru V (frecventa normalizata) determina numarul de moduri pe fibra.

Conditia de monomod este determinata de valoarea lui V la care modurile TE01 si TM01 sunt la taiere. Aceasta conditie este $J_0(V)=0$. Cea mai mica valoare a lui V pentru care $J_0 = 0$ este 2.405. Pentru $V < 2.405$, fibra nu suporta decit modul fundamental HE11.

Fibre monomod - Exemplu

$$\frac{2\pi}{\lambda} a n_1 \sqrt{2\Delta} < 2.405 \quad (55) \qquad \Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$$

$\lambda = 1.2 \mu\text{m}$, $n_1 = 1.45$, $\Delta = 5 \times 10^{-3}$

$$a < \frac{2.405 * 1.2}{2\pi 1.45 \cdot \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}} = 3.16 \mu\text{m}$$

71

Estimare pentru raza miezului

Pentru lungimi de unda intre 1.3 si 1.6 microni, fibra este proiectata, de regula, sa devina monomod pentru pentru lamda > 1.2 microni. Rezulta o raza a miezului $a < 3.16$ microni. Raza miezului poate fi marita la 4 microni (dimensiunea uzuala) daca reducem delta la 3×10^{-3} .

Cimpurile in fibra monomod (HE₁₁)

$$\frac{n_1 - n_2}{n_1} = \Delta \ll 1 \quad (56)$$

$$\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2, \beta \approx k_1 \quad (57)$$

$n = +1, \chi = -1$

$n = -1, \chi = +1$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\rho 1} = -jk_1 T A J_0(T\rho) e^{j\phi} e^{-j\beta z} \\ E_{\phi 1} = k_1 T A J_0(T\rho) e^{j\phi} e^{-j\beta z} \\ E_{z1} = T^2 A J_1(T\rho) e^{j\phi} e^{-j\beta z} \\ H_{\rho 1} = -\frac{k_1 T A}{\eta_1} J_0(T\rho) e^{j\phi} e^{-j\beta z} \\ H_{\phi 1} = -j \frac{k_1 T A}{\eta_1} J_0(T\rho) e^{j\phi} e^{-j\beta z} \\ H_{z1} = -j \frac{T^2 A}{\eta_1} J_1(T\rho) e^{j\phi} e^{-j\beta z} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\rho 1} = jk_1 T A J_0(T\rho) e^{-j\phi} e^{-j\beta z} \\ E_{\phi 1} = k_1 T A J_0(T\rho) e^{-j\phi} e^{-j\beta z} \\ E_{z1} = -T^2 A J_1(T\rho) e^{-j\phi} e^{-j\beta z} \\ H_{\rho 1} = -\frac{k_1 T A}{\eta_1} J_0(T\rho) e^{-j\phi} e^{-j\beta z} \\ H_{\phi 1} = j \frac{k_1 T A}{\eta_1} J_0(T\rho) e^{-j\phi} e^{-j\beta z} \\ H_{z1} = -j \frac{T^2 A}{\eta_1} J_1(T\rho) e^{-j\phi} e^{-j\beta z} \end{array} \right.$$

72

In fibrele optice indicele de refractie al miezului este cu foarte putin mai mare decit cel al tecii. Diferenta este intre 1% si 5%. Prin urmare sunt valabile ecuatiiile (56) si (57). Acest tip de fibra se numeste **fibra optica cu ghidaj slab**.

Pentru aceste fibre, vectorul de unda al undei incidente este aproape paralel cu axa z a fibrei. In acest caz, componentele longitudinale ale cimpurilor sunt mult mai mici decit componente transversale, iar numarul de unda longitudinal este aproximativ egal cu numarul de unda al undei plane in miez. Altfel spus, unda este aproape TEM.

Modul fundamental este HE11. Modurile HE cu $n = 1$ si $n = -1$ reprezinta unde oblice circular polarizate in sensuri opuse, cu coeficienti de faza egali.

Cimpurile in fibra monomod Modul LP₀₁

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\rho 1} = 2k_1 T A J_0(T\rho) \sin \phi e^{-j\beta z} \\ E_{\phi 1} = 2k_1 T A J_0(T\rho) \cos \phi e^{-j\beta z} \\ E_{z1} = j2T^2 A J_1(T\rho) \sin \phi e^{-j\beta z} \\ H_{\rho 1} = -2 \frac{k_1 T A}{\eta_1} J_0(T\rho) \cos \phi e^{-j\beta z} \\ H_{\phi 1} = 2 \frac{k_1 T A}{\eta_1} J_0(T\rho) \sin \phi e^{-j\beta z} \\ H_{z1} = -j2 \frac{T^2 A}{\eta_1} J_1(T\rho) \cos \phi e^{-j\beta z} \end{array} \right. \quad (58)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{y1} = E_0 J_0(T\rho) e^{-j\beta z} \\ E_{z1} = j \frac{T}{k_1} E_0 J_1(T\rho) \sin \phi e^{-j\beta z} \\ H_{x1} = -\frac{E_0}{\eta_1} J_0(T\rho) e^{-j\beta z} \\ H_{z1} = -j \frac{T}{\omega \mu_0} E_0 J_1(T\rho) \cos \phi e^{-j\beta z} \end{array} \right. \quad (59)$$

$$E_0 = 2k_1 T A$$

$$\beta \approx k_1$$

73

Superpozitia acestor doua unde cu amplitudini egale determina o unda polarizata liniar numita modul LP01. Cimpurile sunt date de relatiile (58) sau (59).

Cimpurile in fibra monomod - Modul LP₀₁

$$\begin{cases} E_{y1} = E_0 J_0(T\rho) e^{-j\beta z} \\ H_{x1} = -\frac{E_0}{\eta_1} J_0(T\rho) e^{-j\beta z} \end{cases} \quad (60)$$

$$\frac{|E_{y1}|}{|H_{x1}|} = \eta_1$$

74

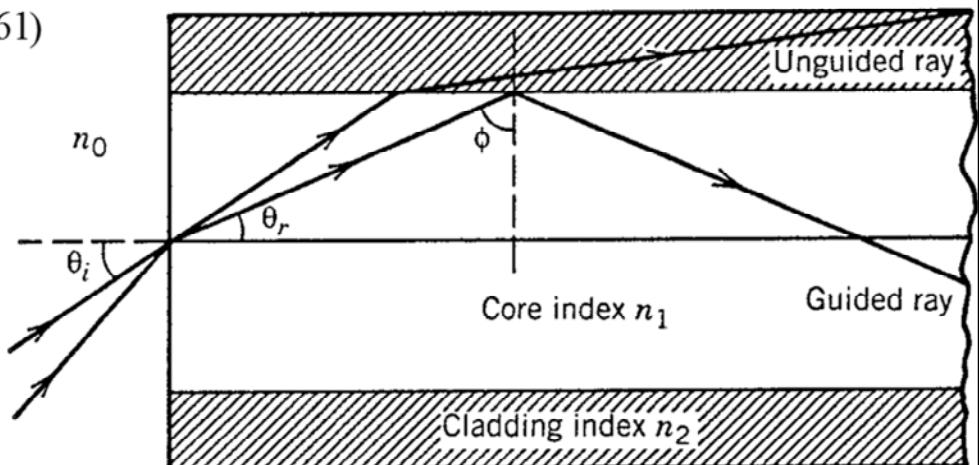
Daca facem aproximatiile Ez1<<Ey1 si Hz1<<Hz1 , atunci componentelete cimpului sunt ca in relatia (60): cimpul in miez este similar cu cel dintr-o unda plana.

Fibre cu salt de indice

$$n_0 \sin \theta_i = n_1 \sin \theta_r \quad (61)$$

$$\sin \phi \leq \frac{n_2}{n_1} \quad (62)$$

$$\sin \phi_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (63)$$



$$n_0 \sin \theta_{ic} = n_1 \sin \phi_c$$

$$n_1 \approx n_2$$

$$= n_1 \cos \theta_c = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = NA \quad (64)$$

$$NA = n_1 \sqrt{2\Delta} \quad (65)$$

75

Refractia este posibila doar pentru unghiuri care satisfac relatia (62). Pentru unghiuri mai mari decit unghiul critic ϕ_c , relatia (63), raza este total reflectata.

Exercitiu

Indicele de refracție al miezului este 1.48 iar indicele de refracție al tecii este 1.46. Care este unghiul de acceptanță al fibrei?

Solutie

$$\sin \theta_{ic} = \sqrt{1.48^2 - 1.46^2} = 0.2425$$

$$\theta_{ic} = \text{Arcsin}(0.2425) = 14.033^\circ$$

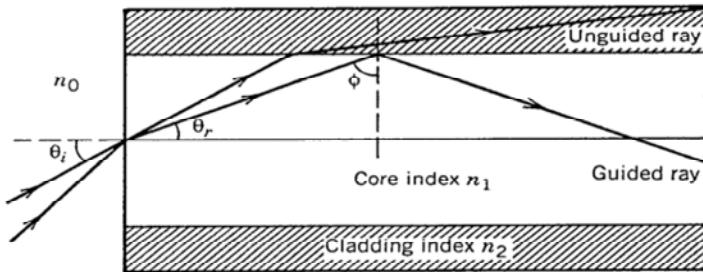
$$\Theta_a = 2\theta_{ic} = 28.07^\circ$$

76

Δ ar trebui să fie cit mai mare pentru ca să putem cupla în fibra maximul de cantitate de lumină.

Totuși asemenea fibre nu ar fi utile în comunicații pentru că apare fenomenul de **dispersie multimod**, care limitează viteza de transmisie.

Dispersia intermodala a fibrei cu salt de indice



$$\Delta T = \frac{n_1}{c} \left(\frac{L}{\sin \phi_c} - L \right) = \frac{L}{c} \frac{n_1^2}{n_2} \Delta \quad (65)$$

$$\Delta T < T_B = \frac{1}{B} \quad (66)$$

$$\frac{L}{c} \frac{n_1^2}{n_2} \Delta < \frac{1}{B} \quad (67)$$

$$BL < \frac{n_2}{n_1^2} \frac{c}{\Delta} \quad (68)$$

77

Dispersia multimodala poate fi inteleasa prin faptul ca diversele moduri de propagare din miez calatoresc pe drumuri de lungimi diferite. Ca urmare, aceste moduri (raze in modelul opto-geometric) ajung la capatul fibrei la momente diferite, chiar daca au calatorit toate cu aceeasi viteza. Ca urmare, un impuls ar fi largit ca urmare a acestor lungimi de drum diferite.

Putem estima largirea impulsului, considerind drumul de lungimea cea mai mica si pe cel de lungimea cea mai mare. Cel mai scurt drum apare pentru $\theta_i = 0$, si are o lungime egala cu cea a fibrei, sa spunem L . Cel mai lung drum apare pentru θ_i dat de ecuatia (64), si are lungimea $L/\sin(\phi c)$. Considerind ca viteza de propagare este aceeasi pentru ambele cazuri, c/n_1 , diferentea de timp este data de relatia (65).

Potem lega ΔT de capacitatea fibrei de transport a informatiei , masurata prin viteza de bit B . Aceasta legatura depinde de multe detalii, cum ar fi , de exemplu, forma impulsului. Este insa evident intuitiv ca ΔT trebuie sa fie mai mic decit intervalul de timp alocat unui bit, T_B (vezi ec.66). Deci, utilizind relatia (65) rezulta (67), respectiv (68).

Relatia (68) este o estimare grosiera a limitarii fundamentale a fibrei cu salt de indice.

EXEMPLU

$$BL < \frac{n_2}{n_1^2} \frac{c}{\Delta}$$

Fibra fara teaca: $n_1=1.5$ si $n_2=1$.

$BL < 0.4$ (Mb/s)-km.

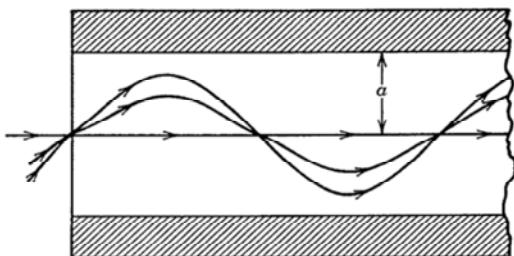
Fibra cu teaca are $\Delta < 0.01$.

De exemplu, pentru $\Delta = 2 \cdot 10^{-3}$ avem $BL < 100$ (Mb/s)*km

78

Aceasta fibra poate comunica cu 10 Mb/s pe o distanță de 10 km.

Fibre multimod cu indice gradat



$$n(\rho) = \begin{cases} n_1 [1 - \Delta (\rho/a)^\alpha]; & \rho < a \\ n_1 (1 - \Delta) = n_2; & \rho \geq a \end{cases} \quad (69)$$

$$\frac{d^2 \rho}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{d\rho} \quad (70)$$

$$\rho(z) = \rho_0 \cos(pz) + (\rho'_0/p) \sin(pz) \quad (71)$$

$$p = \left(2\Delta/a^2 \right)^{1/2}$$

79

In fibrele multimode cu indice gradat, indicele de refractivitate al miezului nu este constant ci descreste gradual de la o valoare maxima n_1 , in centrul fibrei, la o valoare minima n_2 , la interfata miez – teaca. Cele mai multe fibre sunt construite pentru a avea o descretere parabolica si sunt caracterizate utilizand asa numitul “profil α ”, definit in relatia (69). Profilul “salt de indice” este atins pentru $\alpha = \infty$, iar profilul parabolic pentru $\alpha = 2$.

In acest caz, folosind optica geometrica si *aproximatio paraxiala*, se demonstreaza ca traiectoria razei in fibra parabolica este data de ecuatia (70), unde p este distanta radiala a razei de la axa fibrei. In cazul profilului parabolic, folosind relatia (69) pentru $p < a$, ecuatia traiectoriei se reduce la ecuatia oscillatorului armonic, a carei solutie generala este (71), iar ρ_0 si ρ'_0 sunt pozitia si directia razei la intrarea in fibra. Relatia arata ca toate razele recuperaza pozitia si directia initiala la distanta $z=2m\pi/p$, unde m este un intreg. Deci, **fibrele cu indice gradat ideale nu au dispersie intermodala.**

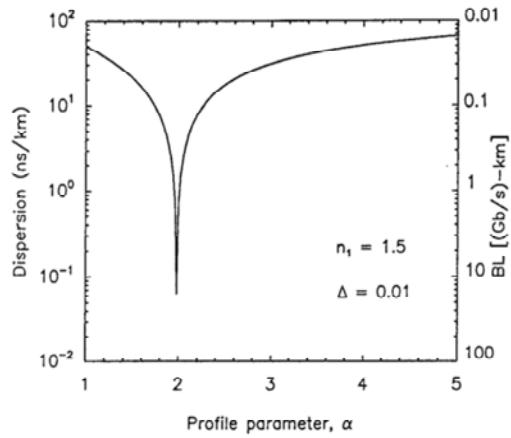
Dispersia intermodala a fibrei cu indice gradat

$$\alpha = 2(1 - \Delta)$$

$$\frac{\Delta T}{L} = \frac{n_1}{8c} \Delta^2 \quad (72)$$

$$\Delta T < T_B = \frac{1}{B} \quad (73)$$

$$BL < \frac{8c}{n_1 \Delta^2} \quad (74)$$



80

In cazul fibrelor practice, modelul opto-geometric si aproximatia paraxiala trebuie abandonate. Singura metoda valabila fiind analiza propagarii undei electromagnetice. Cantitatea ($\Delta T / L$) se deduce ca depinde puternic de α . In figura avem variatia acestui parametru pentru $n_1 = 1.5$ si $\Delta = 0.01$. Minimul dispersiei se obtine pentru $\alpha = 2(1 - \Delta)$ si este dat de relatia (72).

Valoarea limita pentru produsul viteza de bit – distanta se obtine utilizind acelasi criteriu (73) si este data de relatia (74).

Fibrele cu indice gradat, cu un indice al profilului optimizat, poate sustine viteze de 100 Mb/s la distante de 100 km.

DISPERSIA IN FIBRELE MONOMOD GRUP DE UNDE

$$v - v' = \Delta v$$

$$u - u' = \Delta u$$



$$\begin{aligned} \phi &= a \sin 2\pi v \left(t - \frac{x}{u} \right) + a \sin 2\pi v' \left(t - \frac{x}{u'} \right) = \\ &= 2a \sin \pi \left[t(v + v') - x \left(\frac{v}{u} + \frac{v'}{u'} \right) \right] \cos \pi \left[t(v - v') - x \left(\frac{v}{u} - \frac{v'}{u'} \right) \right] \end{aligned}$$

$$v + v' \approx 2v \quad \frac{v}{u} + \frac{v'}{u'} \approx 2 \frac{v}{u} \quad \frac{v}{u} - \frac{v'}{u'} \triangleq \Delta \left(\frac{v}{u} \right)$$

$$\phi \approx 2a \sin 2\pi v \left(t - \frac{x}{u} \right) \cos \pi \left[t\Delta v - x\Delta \left(\frac{v}{u} \right) \right] = A \sin 2\pi v \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

Am vazut ca dispersia intermodala in fibrele multimod conduce la o largire considerabila a impulsurilor optice (~ 10 ns/km). In descrierea modala a propagarii, acest fenomen se datoreste faptului ca fiecare mod are o viteza de grup diferita.

In fibrele monomod, dispersia intermodala dispare deoarece energia este transportata de un singur mod.

Totusi, latirea impulsului nu dispare. Viteza de grup asociata cu modul fundamental de propagare este dependenta de frecventa din cauza dispersiei cromatice. Prin urmare, diferite componente spectrale ale impulsului se propaga cu viteze de grup diferite, fenomen numit dispersie intramodală sau dispersie de viteza de grup (GVD).

Aceasta dispersie are doua componente: dispersia de material si dispersia de ghid.

GRUP DE UNDE - 2



$$t \Delta v - x \Delta \left(\frac{v}{u} \right) = 0$$

$$\frac{1}{v_g} = \frac{t}{x} = \frac{\Delta \left(\frac{v}{u} \right)}{\Delta v} \xrightarrow{\Delta v \rightarrow 0} \frac{d}{dv} \left(\frac{v}{u} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\beta(v)}{dv}$$

DISPERSIA CROMATICA

$$v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1} \quad (75) \quad v_g = \frac{c}{n_g}, \beta = \bar{n}k_0 = \bar{n} \frac{\omega}{c} \quad (76)$$

$$n_g = \bar{n} + \omega \frac{d\bar{n}}{d\omega} \quad (77)$$

$$\Delta T = \frac{dT}{d\omega} \Delta \omega = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{L}{v_g} \right) \Delta \omega = L \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) \Delta \omega = L \frac{d}{d\omega} \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right) \Delta \omega = L \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \Delta \omega = L \beta_2 \Delta \omega \quad (78)$$

$$\beta_2 = \frac{d^2\beta}{d\omega^2}$$

$$\Delta T = \frac{dT}{d\lambda} \Delta \lambda = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{L}{v_g} \right) \Delta \lambda = LD \Delta \lambda$$

$$D = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{v_g} \right) = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2 \quad (79)$$

83

Consideram o fibra de lungime L. O componenta spectrala de frecventa ω ar ajunge la iesirea fibrei dupa un timp $T = L/v_g$, unde v_g este viteza de grup definita prin (75). Folosind (76) obtinem n_g , relatia (77).

Dependenta de frecventa a vitezei de grup conduce la latirea pulsului din cauza faptului ca diferite componente spectrale se deplaseaza cu viteze diferite. Daca $\Delta\omega$ este latimea spectrului pulsului, latirea impulsului pentru o fibra de lungime L este data de relatia (78). β_2 este dispersia cromatica sau GVD.

In sistemele optice de comunicatii, $\Delta\omega$ este determinat de domeniul de lungimi de unda emise de sursa optica.

D se numeste **parametrul de dispersie** si se masoara in ps/(nm*km), vezi relatia (79).

DISPERSIA CROMATICA

$$BL|D|\Delta\lambda < 1 \quad (80)$$

$$\Delta T = \frac{dT}{d\lambda} \Delta\lambda = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{L}{v_g} \right) \Delta\lambda = LD\Delta\lambda$$

$$D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \left(2 \frac{d\bar{n}}{d\omega} + \omega \frac{d^2\bar{n}}{d\omega^2} \right) \quad (81)$$

$$D = D_M + D_W$$

$$D_M = -\frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{d\bar{n}}{d\omega} = \text{dispersia de material}$$

$$D_W = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \omega \frac{d^2\bar{n}}{d\omega^2} = \text{dispersia de ghid}$$

84

Efectul dispersiei este reducerea vitezei de bit B. Aceasta poate fi estimată prin condiția (80).

Pentru fibrele standard din silică, D este relativ mic în jurul lungimii de unde de 1.3 microni. ($D \sim 1\text{ps}/(\text{km}\cdot\text{nm})$).

Pentru o dioda laser, latimea spectrală $\Delta\lambda$ este de 2-4 nm. Produsul BL depășește 100 (Gb/s)*km. Astfel, sistemele de comunicații optice pe 1.3 microni funcționează tipic la viteze de 2 Gb/s cu un interval între repetoare de 40-50 km.

Produsul BL a fibrelor monomod poate depăși 1 (Tb/s)*km cind laserul are o latime spectrală sub 1 nm.

Parametrul de dispersie D poate varia considerabil cind lungimea de undă de funcționare diferă considerabil de 1.3 μm.

Dependenta de lungimea de undă a lui D este guvernata de dependența de frecvență a indicelui de refracție n_{barat} . Din relația (79), D poate fi scris sub forma (81), în care apare suma a doi termeni: DM, dispersia de material, și DW, dispersia de ghid.

DISPERSIA DE MATERIAL

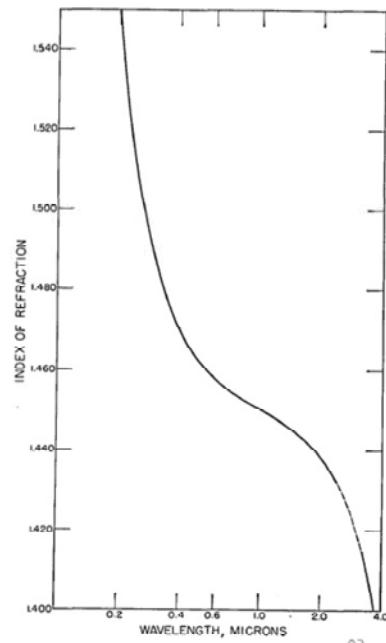
$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^M \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2} \quad (82)$$

SILICA
 B1 = 0.6961663, B2 = 0.4079426, B3 = 0.8974794
 $\lambda_1 = 0.0684043 \mu\text{m}$, $\lambda_2 = 0.1162414 \mu\text{m}$, $\lambda_3 = 9.896161 \mu\text{m}$

$$n_g = n + \omega \frac{dn}{d\omega} \quad (83) \quad D_M = \frac{1}{c} \frac{dn_g}{d\lambda} \quad (84)$$

SILICA

$$D_M \approx 122 \left(1 - \frac{\lambda_{ZD}}{\lambda} \right) \quad (85)$$



Dispersia de material apare deoarece indicele de refractivitate al miezului se modifica cu frecventa optica ω .

Originea dispersiei de material este legata de frecventele caracteristice de rezonanta la care materialul absoarbe radiatia electromagnetică. La frecvente departe de rezonantele mediului, indicele de refractivitate $n(\omega)$ poate fi aproximat prin *ecuatiile lui Sellmeier* (82) [I.H. Malitson, Interspecimen Comparison of the Refractive Index of Fused Silica, Journal Of the Optical Society of America, 55(10), 1205 – 1209, 1965], unde ω_j este frecventa de rezonanta si B_j este intensitatea oscilatiilor. N poate fi n_1 sau n_2 , dupa zona de interes. Suma din Eq.(82) se face dupa toate frecventele de rezonanta care contribuie la domeniul de interes. In cazul fibrelor optice, B_j si ω_j sunt obtinute empiric prin fitarea curbelor de dispersie masurate la Eq.(82) cu $M = 3$.

Indicele de grup , n_g , poate fi obtinut cu relatia (83).

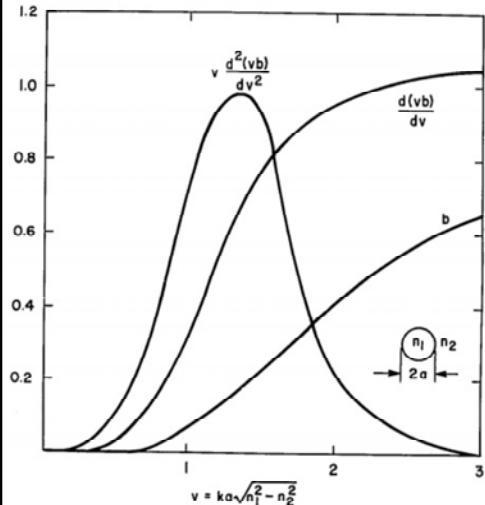
Dispersia de material , D_M , este legata de panta indicelui de grup prin relatia (84). Pentru silica, derivate se anuleaza la $\lambda_{ZD} = 1.276 \mu\text{m}$. Aceasta lungime de unda se numeste lungime de unda la zero dispersie, λ_{ZD} . Dispersia de material este negativa sub aceasta λ_{ZD} si devine pozitiva peste aceasta.

In domeniul de lungimi de unda $1.25 – 1.66 \mu\text{m}$, dispersia de material poate fi aproximata empiric prin relatia (85).

Lungimea de unda de disperse zero depinde si de diametrul miezului si parametrul Δ .

DISPERSIA DE GHID

$$D_W = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \omega \frac{d^2 \bar{n}}{d\omega^2} = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \omega \frac{d^2}{d\omega^2} [n_2(1+b(V)\Delta)] \quad (86)$$

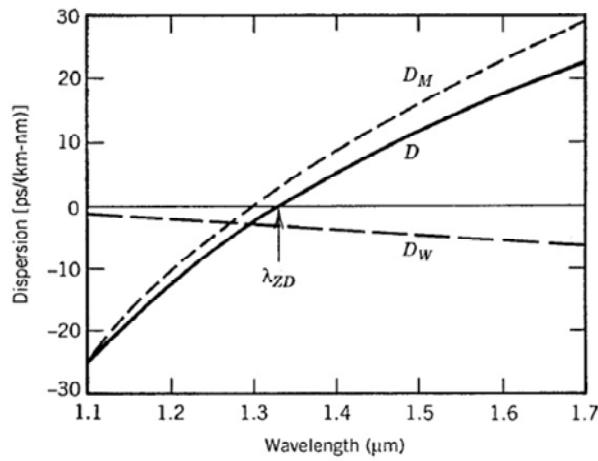


$$D_W = -\frac{2\pi\Delta}{\lambda^2} \left[\frac{n_{2g}^2}{n_2 \omega} \frac{V d^2 (Vb)}{dV^2} + \frac{n_{2g}}{d\omega} \frac{d(Vb)}{dV} \right] \quad (87)$$

86

Contributia dispersiei de ghid DW la dispersia totala este data de relatia (86), unde $b(V)$ este constanta de propagare normalizata . Folosind relatia (17) pentru V in (86) obtinem relatia (87). In figura [D. Gloge, Dispersion in Weakly Guiding Fibers, Applied Optics, 10(11), 2442-2445, 1971] se prezinta modificarea cu v a derivatelor de ordinal 1 si 2 ale lui bV . Deoarece ambele deriveate sunt positive, DW este negativa pe tot intervalul de interes $0 - 1.6 \mu\text{m}$.

DISPERSIA DE GHID

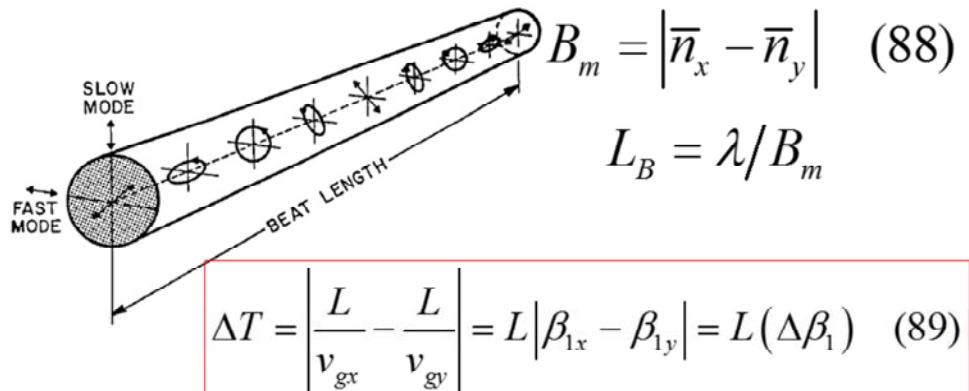


87

Deoarece $D_W < 0$ iar D_M este negativ pentru lungimi de unda mai mici decit λ_{ZD} si pozitiv pentru lungimi de unda mai mari decit λ_{ZD} , in figura observam ca suma lor $D = D_W + D_M$ este nula la o lungime de unda deplasata cu 30 – 40 nm, astfel incit , la silica, valoarea zero pentru D se obtine la $1.31 \mu\text{m}$.

D_W reduce, deasemenea, din D_M pe tot intervalul $1.3 – 1.6 \mu\text{m}$, ceea ce este de interes pentru sistemele de comunicatii optice.

DISPERSIA DE POLARIZARE - PMD



$$\sigma_T^2 \equiv \langle (\Delta T)^2 \rangle$$

$$\sigma_T^2(z) = 2(\Delta \beta_1)^2 l_c^2 [\exp(-z/l_c) + z/l_c - 1]$$

88

O alta sursa de latire a impulsului este birefringenta fibrei.

Modurile polarizate ortogonal care se propaga in fibra raman separate doar in cazul perfect in care miezul este perfect cilindric cu diametru constant.

In cazul in care simetria cilindrica a fibrei este distrusa, degenerscenta dintre modurile polarizate ortogonal se distrug, ceea ce se numeste **birefringenta**.

Gradul de birefringenta modala este definit prin B_m , relatia (88), unde n_x si n_y sunt indicii modali pentru cele doua moduri polarizate ortogonal.

Birefringenta conduce la un schimb de putere intre cele doua componente de polarizare.

Din punct de vedere fizic, lumina polarizata liniar ramane neschimbată numai daca este polarizata in lungul unei axe principale. Altfel, starea de polarizare se schimba in lungul fibrei, de la liniar la eliptic si inapoi la liniar, intr-o maniera periodica de perioada L_B .

Axa rapida este axa in lungul careia indicele de mod este cel mai mic.

Tipic, $B_m \sim 10^{-7}$ si $L_B \sim 10\text{m}$ pentru $\lambda \sim 1\text{\mu m}$.

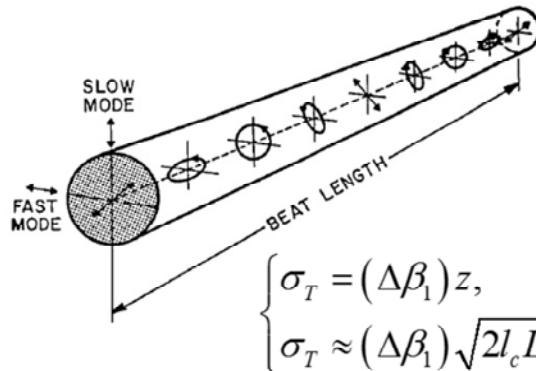
Daca impulsul de lumina de la intrare excita ambele polarizari, ele se va lati deoarece cele doua componente disperseaza in lungul fibrei. Acest fenomen se numeste dispersia modului de polarizare – PMD.

In fibrele cu birefringenta constanta, latirea impulsului poate fi estimata din intirzirea ΔT intre cele doua componente de polarizare.

Latirea impulsului indusa de PMD este caracterizata de valoarea medie patratica a lui ΔT , obtinuta dupa medierea peste schimbari aleatorii de birefringenta.

L_c este lungimea de corelatie definita ca fiind lungimea in care doua componente de polarizare raman corelate. Valoarea sa poate varia intre 1 m si 1 km, in functie de fibra. Valoarea tipica este de $\sim 10\text{m}$.

DISPERSIA MODULUI DE POLARIZARE



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_T = (\Delta\beta_1)z, \\ \sigma_T \approx (\Delta\beta_1)\sqrt{2l_c L} = D_p \sqrt{L}, \end{array} \right. \quad z \ll l_c \quad (90)$$

$$z \gg l_c \quad (91)$$

89

Pentru distante mici, $z \ll l_c$, $\sigma_T = (\Delta\beta_1)z$, relatia (90)

Pentru $z > 1\text{ km}$, o buna estimare a latirii impulsului este obtinuta considerind $z \gg l_c$.

Pentru o fibra de lungime L , avem relatia (91), unde D_p este parametrul PMD. Valorile masurate ale lui D_p variază între $0.01 - 10 \text{ ps/sqr(km)}$.

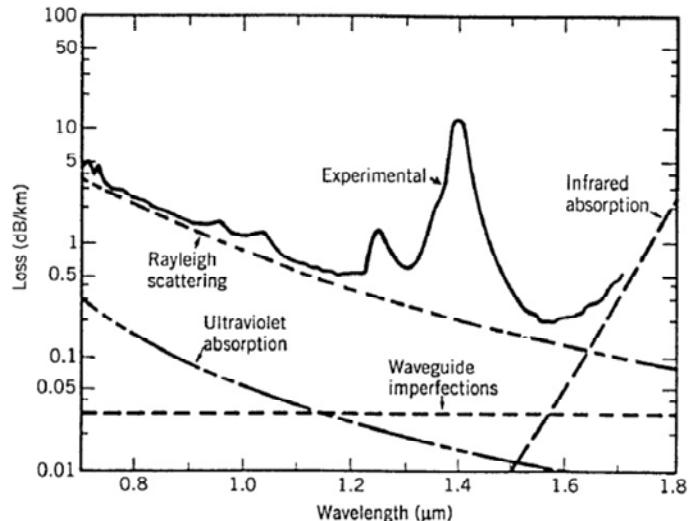
$\sigma_T \sim 1 \text{ ps}$ pentru fibre de lungime $\sim 100 \text{ km}$.

PIERDERILE IN FIBRA

$$\frac{dP}{dz} = -\alpha P \quad (92)$$

$$P_{ies} = P_{in} e^{-\alpha L} \quad (93)$$

$$\alpha [dB/km] = -\frac{10}{L} \log \left(\frac{P_{ies}}{P_{in}} \right) \quad (94)$$



90

In general, modificarile in puterea optica medie P a unui sir de biti care se propaga in interiorul unei fibre optice sunt guvernate de legea lui Beer, (92), unde α este *coeficientul de atenuare*. Aceasta include atit absorbtia de material cit si alte surse de atenuare cum ar fi imperfectiunile miezului, imprastierea Rayleigh, absorbtia in ultraviolet sau cea in ifrarozi.

Daca P_{in} este puterea lansata in fibra de lungime L , puterea la iesire va fi data de relatia (93).

De obicei, coeficientul de atenuare α se exprima in dB / km, folosind relatia (94). In acest caz, el se numeste *parametrul de pierderi al fibrei*.

Pierderile in fibra depend de lungimea de unda a luminii transmise.

In figura este prezentata dependent pierderilor de lungimea de unda pentru o fibra mono-mod avind un diametru al miezului de $9.4 \mu m$, $\Delta = 1.9 \cdot 10^{-3}$ si lungimea de unda la taiere de $1.1 \mu m$. Aceasta fibra are pierderi de 0.2 dB/km in regiunea de lungimi de unda linga $1.55 \mu m$. Aceasta valoare este foarte aproape de limita fundamentală de 0.16 dB/km a unei fibre cu miez de silica.

Un al doilea minim este linga $1.3 \mu m$, unde pierderile sunt sub 0.5 dB/km .

Pentru lungimi de unda mai mici, pierderile sunt considerabil mai mari, depasind 5 dB/km in domeniul vizibil.